

## UNIDAD 12

# REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES



### Página 328

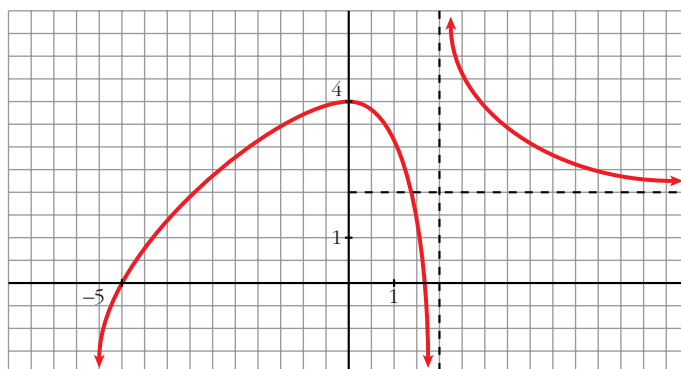
#### Descripción de una gráfica

1. ■ Copia en tu cuaderno los datos encuadrados en rojo. A partir de ellos y sin mirar la gráfica que aparece al principio, representa esta función sobre unos ejes coordenados dibujados en papel cuadriculado.

(La solución está en el propio ejercicio).

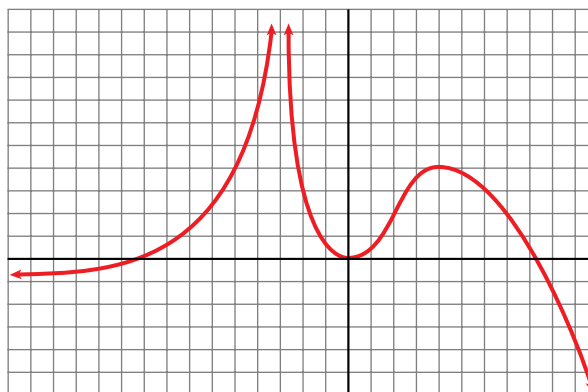
2. Traza unos ejes coordenados sobre papel cuadriculado y representa una curva, lo más sencilla posible, que cumpla las siguientes condiciones:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$
- $f(0) = 4$ ;  $f'(0) = 0$
- $f(-5) = 0$ ;  $f(1,75) = 0$
- $f$  es derivable en todo  $\mathbb{R}$ , salvo en  $x = 2$ .



## Página 329

3. Describe, con la menor cantidad de datos y de forma similar a la de los apartados anteriores, la siguiente función:



- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty$
- $f(-9) = 0$ ;  $f(0) = 0$ ;  $f(8) = 0$
- $f'(0) = 0$
- $f(4) = 4$ ;  $f'(4) = 0$

4. Representa sobre unos ejes en papel cuadrículado una gráfica inventada por ti. Descríbela en papel aparte. Dale la descripción a tu compañera o compañero para que la represente.

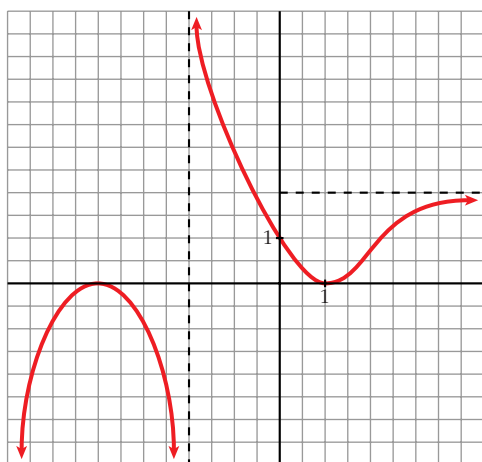
Representa tú la suya.

Comparad cada representación con la curva original. Discutid las diferencias que observéis.

¿Hay algún error en la representación?

¿Hay, acaso, error en la descripción?

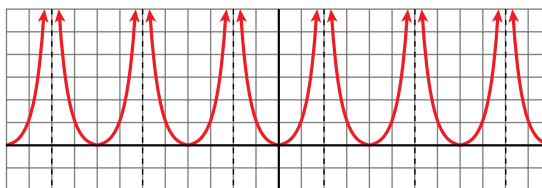
¿Es todo correcto?



Por ejemplo:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$
- $f(-4) = 0$ ;  $f'(-4) = 0$
- $f(1) = 0$ ;  $f'(1) = 0$
- $f(0) = 1$

5. Observa esta gráfica:



• Halla la ordenada para las siguientes abscisas:

$$x = 0, x = 1, x = 3, x = -7, x = 12,$$

$$x = -400, x = 13, x = -199$$

• ¿En qué puntos no está definida esta función?

• ¿Qué tramo de la función te bastaría conocer para hacerte una idea exacta de cómo es la gráfica?

• ¿Te sugiere esta curva algún tipo de simetría o periodicidad?

•  $f(0) = 0; f(1) = 1; f(3) = 1; f(-7) = 1$

$f(12) = 0; f(-400) = 0; f(13) = 1; f(-199) = 1$

(En general,  $f(4k) = 0; f(4k + 1) = f(4k - 1) = 1$  y no existe  $f(x)$  en  $x = 4k + 2$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ ).

• La función no está definida en los puntos de la forma  $x = 4k + 2$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ .

• Bastaría con conocer la función para  $x \in [0, 2)$ , si supiéramos que es par y que es periódica de periodo 4.

• Simetría  $\rightarrow$  Es una función par (simétrica respecto al eje  $Y$ ).

Periodicidad  $\rightarrow$  Es periódica de periodo 4.

## Página 330

1. Halla el dominio de estas funciones:

a)  $y = x^3 - 5x^2 + 7x + 3$

b)  $y = \frac{3x^3 + 5}{x^2 - 5x + 4}$

c)  $y = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$

a)  $D = \mathbb{R}$

b)  $x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$

$D = \mathbb{R} - \{1, 4\}$

c)  $x^2 + 1 \neq 0$  para todo  $x \rightarrow D = \mathbb{R}$

2. Halla el dominio de:

a)  $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

b)  $y = \ln(x^2 + 1)$

c)  $y = \ln(x^2 - 1)$

d)  $y = \frac{e^x}{x^2}$

a)  $x^2 - 2x \geq 0 \rightarrow D = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

b)  $x^2 + 1 > 0$  para todo  $x \rightarrow D = \mathbb{R}$

c)  $x^2 - 1 > 0 \rightarrow D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

d)  $x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow D = \mathbb{R} - \{0\}$

### Página 331

**3. Halla las posibles simetrías y periodicidades, di dónde son continuas y dónde derivables:**

a)  $y = 3x^4 - 5x^2 - 1$

b)  $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

c)  $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

d)  $y = \frac{x^3 - 1}{x^2}$

e)  $y = \text{sen } x + 1/2 (\text{sen } 2x)$

a)  $f(-x) = 3(-x)^4 - 5(-x)^2 - 1 = 3x^4 - 5x^2 - 1 = f(x)$

Es una función par: simétrica respecto al eje  $Y$ .

No es periódica.

Es continua y derivable en  $\mathbb{R}$ .

b)  $\text{Dominio} = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$f(-x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ . No es par ni impar; no es simétrica respecto al eje  $Y$  ni respecto al centro de coordenadas.

No es periódica.

Es continua en su dominio.

Es derivable en  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ .

c)  $\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$f(-x) = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$ . Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

Es continua y derivable en su dominio.

d)  $\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{0\}$

$f(-x) = \frac{-x^3 - 1}{x^2}$ . No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje  $Y$  ni respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

Es continua y derivable en su dominio.

e)  $\text{Dominio} = \mathbb{R}$

$f(-x) = \text{sen } (-x) + \frac{1}{2} (\text{sen } (-2x)) = -\text{sen } x - \frac{1}{2} (\text{sen } (2x)) = -f(x)$

Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

Es periódica de periodo  $2\pi$ .

Es continua y derivable en  $\mathbb{R}$ .

## Página 332

### 4. Halla las ramas infinitas de:

a)  $y = 3x^5 - 20x^3$

b)  $y = \frac{x^4}{x^2 - 1}$

c)  $y = \frac{x^3}{(x - 2)^2}$

d)  $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

e)  $y = \ln(x^2 + 1)$

f)  $y = 2^{x-1}$

a)  $y = 3x^5 - 20x^3$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



Ramas parabólicas

b)  $y = \frac{x^4}{x^2 - 1}$

- $\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

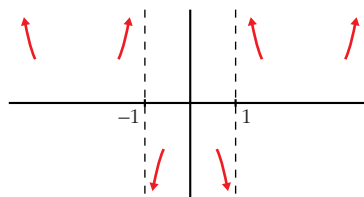
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

Ramas parabólicas

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

Asíntotas verticales:  $x = -1; x = 1$



c)  $y = \frac{x^3}{(x - 2)^2} = \frac{x^3}{x^2 - 4x + 4} = x + 4 + \frac{12x - 16}{x^2 - 4x + 4}$

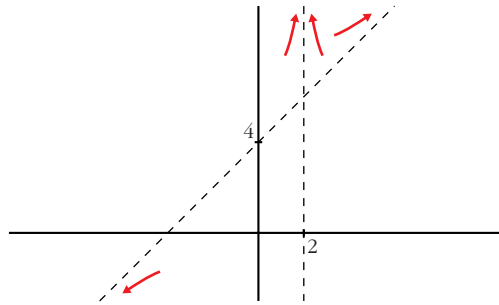
- $\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{2\}$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$y = x + 4$  es una asíntota oblicua.

$$f(x) - (x + 4) = \frac{12x - 16}{x^2 - 4x + 4} \rightarrow \begin{cases} f(x) - (x + 4) > 0 & \text{si } x \rightarrow +\infty \\ f(x) - (x + 4) < 0 & \text{si } x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$



d)  $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

•  $\text{Dominio} = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} = -1 \rightarrow \text{Hay asíntota oblicua.}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 - 2x} + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 2x} - x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}{(\sqrt{x^2 + 2x} + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

$y = -x + 1$  es una asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} = 1 \rightarrow \text{Hay asíntota oblicua.}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 2x} - x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x} - x)(\sqrt{x^2 - 2x} + x)}{(\sqrt{x^2 - 2x} + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = -1 \end{aligned}$$

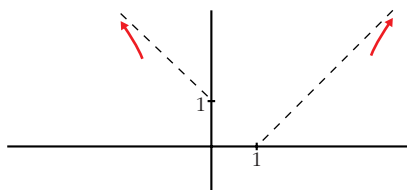
$y = x - 1$  es una asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow +\infty$ .

• No hay asíntotas verticales.

- Posición de la curva respecto a las asíntotas:

$$f(x) - (-x + 1) < 0 \text{ si } x \rightarrow -\infty$$

$$f(x) - (x - 1) < 0 \text{ si } x \rightarrow +\infty$$



e)  $y = \ln(x^2 + 1)$

- Dominio =  $\mathbb{R}$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

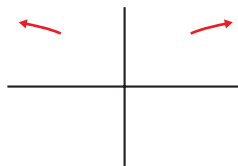
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$$

} Ramas parabólicas

- No hay asíntotas verticales.



f)  $y = 2^{x-1} > 0$  para todo  $x$ .

- Dominio =  $\mathbb{R}$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \rightarrow y = 0$  es asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

- No hay asíntotas verticales.



## Página 333

5. Halla los puntos singulares y los puntos de inflexión de:

a)  $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$

b)  $y = \ln(x^2 + 1)$

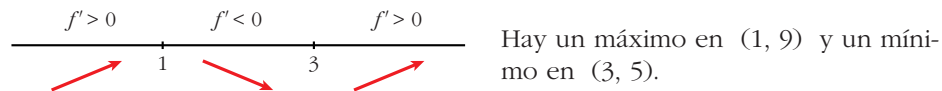
a)  $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ . Dominio =  $\mathbb{R}$

- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

•  $f'(x) = 0 \rightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de  $f'(x)$ :



•  $f''(x) = 6x - 12$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$$

Signo de  $f''(x)$ :



b)  $y = \ln(x^2 + 1)$ . Dominio =  $\mathbb{R}$

•  $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

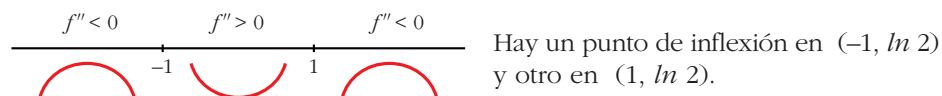
$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} f''(x) < 0 \text{ para } x < 0 \\ f''(x) > 0 \text{ para } x > 0 \end{array} \right\} \text{ Hay un mínimo en } (0, 0).$$

•  $f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$

$$f''(x) = 0 \rightarrow -2x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de  $f''(x)$ :



**6. Halla los puntos singulares de:**

a)  $y = 3x^5 - 20x^3$

b)  $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

c)  $y = \frac{x^3}{(x - 2)^2}$

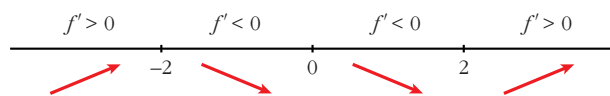
d)  $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

a)  $y = 3x^5 - 20x^3$ . Dominio =  $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 15x^4 - 60x^2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 15x^2(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de  $f'(x)$ :



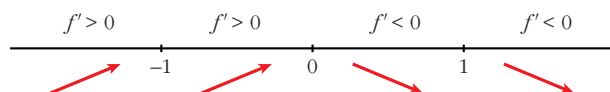
Hay un máximo en  $(-2, 64)$ , un mínimo en  $(2, -64)$ , y un punto de inflexión en  $(0, 0)$ .

b)  $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ . Dominio =  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de  $f'(x)$ :



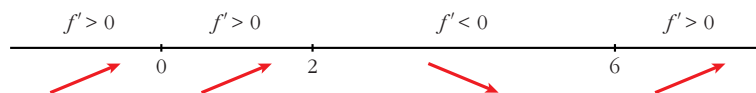
Hay un máximo en  $(0, 0)$ .

c)  $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$ . Dominio =  $\mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-2)^2 - x^3 \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{3x^2(x-2) - 2x^3}{(x-2)^3} = \frac{3x^3 - 6x^2 - 2x^3}{(x-2)^3} = \frac{x^3 - 6x^2}{(x-2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(x-6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

Signo de  $f'(x)$ :



Hay un punto de inflexión en  $(0, 0)$  y un mínimo en  $(6, \frac{27}{2})$ .

d)  $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ . Dominio =  $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x-1 = 0 \rightarrow x = 1 \notin \text{Dominio.}$$

No hay puntos singulares.

## Página 335

### 1. Representa estas funciones:

a)  $y = x^4 - 8x^2 + 7$       b)  $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$       c)  $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$

a)  $y = x^4 - 8x^2 + 7$

- **Simetrías:**

$$f(-x) = x^4 - 8x^2 + 7 = f(x). \text{ Es par: simétrica respecto al eje } Y.$$

- **Ramas infinitas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = 4x^3 - 16x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 4x(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Puntos singulares:  $(0, 7)$ ;  $(-2, -9)$ ;  $(2, -9)$

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje  $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 7 \rightarrow$  Punto  $(0, 7)$

— Con el eje  $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^4 - 8x^2 + 7 = 0$

$$x^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} \begin{cases} x^2 = 7 \rightarrow x = \pm \sqrt{7} \\ x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Puntos:  $(-\sqrt{7}, 0)$ ;  $(-1, 0)$ ;  $(1, 0)$ ;  $(\sqrt{7}, 0)$

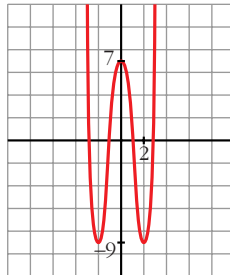
- **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = 12x^2 - 16$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 12x^2 - 16 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Puntos  $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{-17}{9}\right)$  y  $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{-17}{9}\right)$

- **Gráfica:**



b)  $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$

• **Simetrías:**

$f(-x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2$ . No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje  $Y$  ni respecto al origen de coordenadas.

• **Ramas infinitas:**

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

• **Puntos singulares:**

$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 72x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 12x(x^2 + x - 6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$

Puntos:  $(0, 0); (2, -64); (-3, -189)$

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje  $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$  Punto  $(0, 0)$

— Con el eje  $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2(3x^2 + 4x - 36) = 0$

$\begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 432}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{448}}{6} \end{cases} \begin{cases} x \approx 2,86 \\ x \approx -4,19 \end{cases}$

Puntos:  $(0, 0); (2,86; 0); (-4,19; 0)$

• **Puntos de inflexión:**

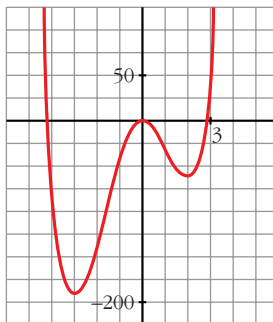
$f''(x) = 36x^2 + 24x - 72$

$f''(x) = 0 \rightarrow 12(3x^2 + 2x - 6) = 0$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 72}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{6} \begin{cases} x \approx 1,12 \\ x \approx -1,79 \end{cases}$

Puntos:  $(1,12; -34,82)$  y  $(-1,79; -107,22)$

• **Gráfica:**



c)  $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$

• **Simetrías:**

$f(-x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$ . No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje  $Y$  ni respecto al origen de coordenadas.

• **Ramas infinitas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 4(x^3 - 3x^2 - x + 3) = 0 \rightarrow 4(x-1)(x+1)(x-3) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{array} \right\} \text{Puntos } (1, 7); (-1, -9); (3, -9)$$

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje  $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$  Punto  $(0, 0)$

— Con el eje  $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x(x^3 - 4x^2 - 2x + 12) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x^3 - 4x^2 - 2x + 12 = 0 \rightarrow (x-2)(x^2 - 2x - 6) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 2 \\ x \approx 3,65 \\ x \approx -1,65 \end{array}$$

Puntos:  $(0, 0); (2, 0); (3,65; 0); (-1,65; 0)$

• **Puntos de inflexión:**

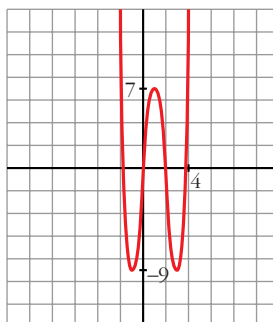
$$f''(x) = 12x^2 - 24x - 4$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 4(3x^2 - 6x - 1) = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 12}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{6} \left\{ \begin{array}{l} x \approx 2,15 \\ x \approx -0,15 \end{array} \right.$$

Puntos:  $(2,15; -1,83)$  y  $(-0,15; -1,74)$

• **Gráfica:**



**2. Representa las siguientes funciones:**

a)  $y = 3x^4 - 4x^3 - 16$       b)  $y = x^3 - 3x$       c)  $y = (1/4)x^4 - 2x^2$

a)  $y = 3x^4 - 4x^3 - 16$

• **Simetrías:**

$f(-x) = 3x^4 + 4x^3 - 16$ . No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje  $Y$  ni respecto al origen de coordenadas.

• **Ramas infinitas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 12x^2(x - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Puntos:  $(0, -16)$ ;  $(1, -17)$

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje  $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -16 \rightarrow$  Punto  $(0, -16)$

— Con el eje  $X \rightarrow y = 0 \rightarrow 3x^4 - 4x^3 - 16 = 0 \rightarrow$

$$\begin{cases} x = 2 \\ 3x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{tiene una sola raíz, que está entre } -2 \text{ y } -1;$$

pues, si  $g(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 8$ ,  $g(-2) = -16 < 0$  y  $g(-1) = 3 > 0$ .

Puntos  $(2, 0)$  y  $(k, 0)$ , con  $k$  entre  $-2$  y  $-1$ .

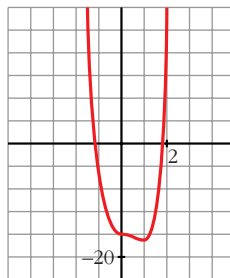
• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = 36x^2 - 24x$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 12x(3x - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Puntos:  $(0, -16)$  y  $\left(\frac{2}{3}, \frac{-448}{27}\right)$

• **Gráfica:**



b)  $y = x^3 - 3x$

• **Simetrías:**

$f(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$ . Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

• **Ramas infinitas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Puntos:  $(-1, 2)$ ;  $(1, -2)$

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje  $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$  Punto  $(0, 0)$

— Con el eje  $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^3 - 3x = 0 \rightarrow x(x^2 - 3) = 0$

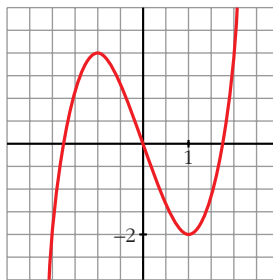
$$\left. \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases} \right\} \text{Puntos: } (0, 0); (-\sqrt{3}, 0); (\sqrt{3}, 0)$$

• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Punto } (0, 0)$$

• **Gráfica:**



c)  $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

• **Simetrías:**

$f(-x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 = f(x)$ . Es par: simétrica respecto al eje  $Y$ .

• **Ramas infinitas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = x^3 - 4x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Puntos:  $(0, 0)$ ;  $(-2, -4)$ ;  $(2, -4)$

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje  $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$  Punto  $(0, 0)$

— Con el eje  $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2\left(\frac{1}{4}x^2 - 2\right) = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 8 \end{cases} \begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ x = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Puntos:  $(0, 0)$ ;  $(-2\sqrt{2}, 0)$ ;  $(2\sqrt{2}, 0)$

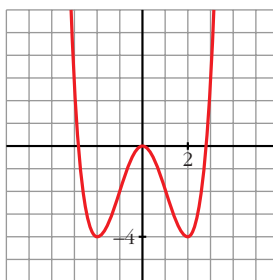
• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = 3x^2 - 4$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Puntos:  $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{20}{9}\right)$ ;  $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{20}{9}\right)$

• **Gráfica:**



## Página 337

1. Representa:

a)  $y = \frac{x^3}{1-x^2}$

b)  $y = \frac{x^2 - 2x - 8}{x}$

a)  $y = \frac{x^3}{1-x^2} = -x + \frac{x}{1-x^2}$ . Dominio =  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

• **Simetrías:**

$f(-x) = \frac{-x^3}{1-x^2} = -f(x)$ . Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

• **Asíntotas verticales:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{Asíntota vertical en } x = -1.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{Asíntota vertical en } x = 1.$$

• **Asíntota oblicua:**

$\frac{x^3}{1-x^2} = -x + \frac{x}{1-x^2} \rightarrow y = -x$  es asíntota oblicua.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - (-x) > 0$  si  $x \rightarrow -\infty$  (curva por encima)

$f(x) - (-x) < 0$  si  $x \rightarrow +\infty$  (curva por debajo)

• **Puntos singulares:**

$f'(x) = \frac{3x^2(1-x^2) - x^3 \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{-x^4 + 3x^2}{(1-x^2)^2}$

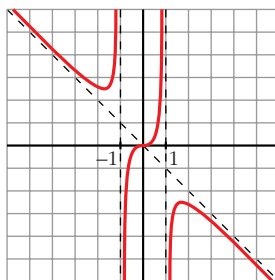
$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(-x^2 + 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$

Puntos:  $(0, 0); \left(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right); \left(\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

• **Cortes con los ejes:**

Corta a los ejes en  $(0, 0)$ .

• **Gráfica:**



b)  $y = \frac{x^2 - 2x - 8}{x} = x - 2 - \frac{8}{x}$ . Dominio =  $\mathbb{R} - \{0\}$

• **Simetrías:**

$f(-x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{-x}$ . No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje  $Y$  ni respecto al origen.

• **Asíntotas verticales:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{Asíntota vertical en } x = 0.$$

• **Asíntota oblicua:**

$$\frac{x^2 - 2x - 8}{x} = x - 2 - \frac{8}{x} \rightarrow y = x - 2 \text{ es asíntota oblicua.}$$

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - (x - 2) > 0$  si  $x \rightarrow -\infty$  (curva por encima)

$f(x) - (x - 2) < 0$  si  $x \rightarrow +\infty$  (curva por debajo)

• **Puntos singulares:**

$f'(x) = 1 + \frac{8}{x^2} > 0$  para todo  $x$  del dominio.

La función es creciente en todo su dominio. No tiene puntos singulares.

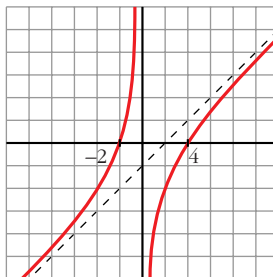
• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje  $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases}$

Puntos:  $(-2, 0)$  y  $(4, 0)$

— No corta el eje  $Y$ , pues no está definida en  $x = 0$ .

• **Gráfica:**



**2. Representa:**

a)  $y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$

b)  $y = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$

a)  $y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$ . Dominio =  $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

• **Simetrías:**

$f(-x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = f(x)$ . Es par: simétrica respecto al eje  $Y$ .

• **Asíntotas verticales:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{Asíntota vertical en } x = -2.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{Asíntota vertical en } x = 2.$$

• **Asíntota horizontal:**

$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = 1 - \frac{5}{x^2 - 4} \rightarrow y = 1$  es asíntota horizontal.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - 1 < 0$  si  $x \rightarrow -\infty$  (curva por debajo)

$f(x) - 1 < 0$  si  $x \rightarrow +\infty$  (curva por debajo)

• **Puntos singulares:**

$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2 - 9)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x(x^2 - 4 - x^2 + 9)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{10x}{(x^2 - 4)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow 10x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Punto } \left(0, \frac{9}{4}\right)$

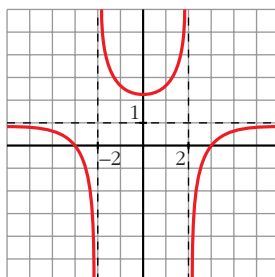
• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje  $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = \frac{9}{4} \rightarrow \text{Punto } \left(0, \frac{9}{4}\right)$

— Con el eje  $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$

Puntos:  $(-3, 0)$  y  $(3, 0)$ .

• **Gráfica:**



b)  $y = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$ . Dominio =  $\mathbb{R}$

• **Simetrías:**

$$f(-x) = \frac{-x^3 - 2x}{x^2 + 1} = -f(x). \text{ Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.}$$

• **No tiene asíntotas verticales.**

• **Asíntota oblicua:**

$$\frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} = x + \frac{x}{x^2 + 1} \rightarrow y = x \text{ es asíntota oblicua.}$$

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$$f(x) - x < 0 \text{ si } x \rightarrow -\infty \text{ (curva por debajo)}$$

$$f(x) - x > 0 \text{ si } x \rightarrow +\infty \text{ (curva por encima)}$$

• **Puntos singulares:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 + 2)(x^2 + 1) - (x^3 + 2x) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 + 2x^2 + 2 - 2x^4 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{x^4 + x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^4 + x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2} \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

No hay puntos singulares.

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje  $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$  Punto  $(0, 0)$

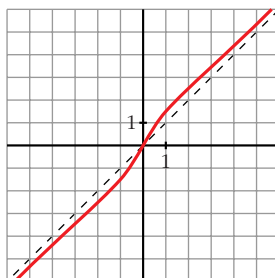
— Con el eje  $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^3 + 2x = 0 \rightarrow x(x^2 + 2) = 0 \rightarrow$   
 $\rightarrow x = 0 \rightarrow$  Punto  $(0, 0)$

• **Puntos de inflexión:**

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(4x^3 + 2x)(x^2 + 1)^2 - (x^4 + x^2 + 2) \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} = \\ &= \frac{(4x^3 + 2x)(x^2 + 1) - 4x(x^4 + x^2 + 2)}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{array} \right. \text{ Puntos: } (0, 0); \left(-\sqrt{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{4}\right); \left(\sqrt{3}, \frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$$

• Gráfica:



## Página 339

1. Representa:

a)  $y = \sqrt{x^2 + 2x}$       b)  $y = \sqrt{x^2 - 9}$

a)  $y = \sqrt{x^2 + 2x}$

• Dominio:

$$x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(x + 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$D = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$$

• Simetrías:

$f(-x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ . No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje  $Y$  ni respecto al origen de coordenadas.

• No tiene asíntotas verticales.

• Asíntotas oblicuas:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{-x} = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 + 2x} + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 2x} - x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x} - x)(\sqrt{x^2 - 2x} + x)}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \\ &= \frac{-2}{1 + 1} = \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

$y = -x - 1$  es asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 2x} - x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \\ &= \frac{2}{1 + 1} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

$y = x + 1$  es asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow +\infty$ .

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow$  Como no pertenece al dominio de  $f(x)$ , no hay puntos singulares.

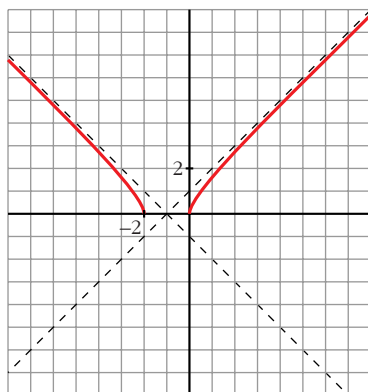
• **Cortes con los ejes:**

$$\text{— Con el eje } X \rightarrow y = 0 \rightarrow \sqrt{x^2 + 2x} \rightarrow x^2 + 2x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Puntos:  $(0, 0)$  y  $(-2, 0)$

$$\text{— Con el eje } Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow \text{Punto: } (0, 0)$$

• **Gráfica:**



$$b) y = \sqrt{x^2 - 9}$$

• **Dominio:**

$$x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$D = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

• **Simetrías:**

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 9} = \sqrt{x^2 - 9} = f(x). \text{ Es par: simétrica respecto al eje } Y.$$

• **No tiene asíntotas verticales.**

• **Asíntotas oblicuas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{-x} = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 - 9} + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 9} - x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 9} - x)(\sqrt{x^2 - 9} + x)}{(\sqrt{x^2 - 9} + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = 0 \end{aligned}$$

$y = -x$  es asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 9} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 9} - x)(\sqrt{x^2 - 9} + x)}{(\sqrt{x^2 - 9} + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = 0 \end{aligned}$$

$y = x$  es asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow +\infty$ .

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$ . Como no pertenece al dominio de  $f(x)$ , no hay puntos singulares.

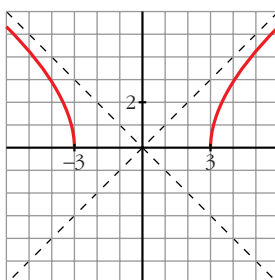
• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje  $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \sqrt{x^2 - 9} \rightarrow x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$

Puntos:  $(-3, 0)$  y  $(3, 0)$

— No corta al eje  $Y$ , pues no existe  $f(0)$ .

• **Gráfica:**



**2. Representa:**

a)  $y = \ln(x^2 + 4)$

b)  $y = \ln(x^2 - 1)$

a)  $y = \ln(x^2 + 4)$

• **Dominio:**

Como  $x^2 + 4 > 0$  para todo  $x$ ,  $D = \mathbb{R}$ .

• **Simetrías:**

$f(-x) = \ln(x^2 + 4) = f(x)$ . Es par: simétrica respecto al eje  $Y$ .

• **No tiene asíntotas verticales.**

• **Ramas infinitas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 4)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2 + 4}}{1} = 0$$

Por tanto, no tiene asíntotas de ningún tipo.

Tiene ramas parabólicas.

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}$$

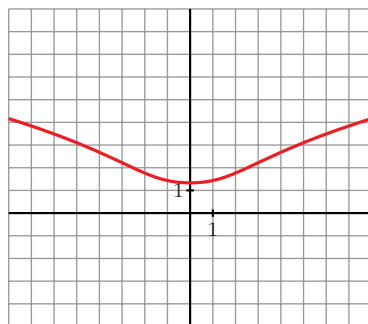
$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Punto } (0, \ln 4)$$

• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 4) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{2x^2 + 8 - 4x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{8 - 2x^2}{(x^2 + 4)^2}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 8 - 2x^2 = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \end{array} \right\} \text{ Puntos: } (-2, \ln 8) \text{ y } (2, \ln 8)$$

• **Gráfica:**



b)  $y = \ln(x^2 - 1)$

• **Dominio:**

$$x^2 - 1 > 0 \rightarrow D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

• **Simetrías:**

$$f(-x) = \ln(x^2 - 1) = f(x). \text{ Es par: simétrica respecto al eje } Y.$$

• **Asíntotas verticales:**

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

$x = -1$  y  $x = 1$  son asíntotas verticales.

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2 - 1}}{1} = 0$$

Tiene ramas parabólicas.

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$ . No tiene puntos singulares, pues la función no está definida en  $x = 0$ .

• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2}$$

No tiene puntos de inflexión.

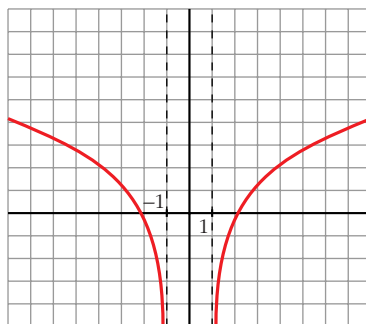
• **Puntos de corte con los ejes:**

— Con el eje  $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \ln(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 1$

$$x^2 = 2 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases} \text{ Puntos: } (-\sqrt{2}, 0) \text{ y } (\sqrt{2}, 0)$$

— No corta al eje  $Y$ , pues no existe  $f(0)$ .

• **Gráfica:**



## Página 340

**3. Representa:**  $y = \frac{e^x}{x^2}$

$$y = \frac{e^x}{x^2}$$

• **Dominio:**  $D = \mathbb{R} - \{0\}$

• **No es simétrica.**

• **Asíntotas verticales:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{ Asíntota vertical: } x = 0$$

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ . Además  $f(x) > 0$  para todo  $x$  del dominio.

$y = 0$  es una asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow -\infty$

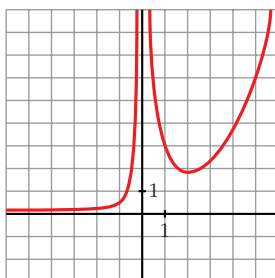
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty. \text{ Rama parabólica.}$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x \cdot e^x(x-2)}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow \text{Punto} \left( 2, \frac{e^2}{4} \right)$$

• **Gráfica:**



**4. Representa:**  $y = \frac{1}{2} \cos 2x + \cos x$

$$y = \frac{1}{2} \cos 2x + \cos x$$

• El periodo de  $\cos x$  es  $2\pi$  y el de  $\cos 2x$  es  $\pi$ . Por tanto, la función es periódica de periodo  $2\pi$ . La estudiamos solo en este intervalo.

• Es **derivable** en todo  $\mathbb{R}$  (es suma de funciones derivables).

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = -\sin 2x - \sin x = -2\sin x \cos x - \sin x = -\sin x(2\cos x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -\sin x(2\cos x + 1) = 0 \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\sin x = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{Punto} \left( 0, \frac{3}{2} \right) \\ x = \pi \rightarrow \text{Punto} \left( \pi, -\frac{1}{2} \right) \end{cases}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} \rightarrow \text{Punto} \left( \frac{2\pi}{3}, -\frac{3}{4} \right) \\ x = \frac{4\pi}{3} \rightarrow \text{Punto} \left( \frac{4\pi}{3}, -\frac{3}{4} \right) \end{cases}$$

• **Puntos de corte con los ejes:**

— Con el eje  $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = \frac{3}{2} \rightarrow \text{Punto} \left( 0, \frac{3}{2} \right)$

— Con el eje  $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \cos 2x + 2\cos x = 0$

$$\cos^2 x - \sin^2 x + 2\cos x = 0$$

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + 2\cos x = 0$$

$$\cos^2 x - 1 + \cos^2 x + 2\cos x = 0$$

$$2\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 8}}{4} \begin{cases} \cos x = 0,366 \\ \cos x = -1,366 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

$$\cos x = 0,366 \begin{cases} x = 1,2 \\ x = 5,09 \end{cases}$$

Puntos: (1,2; 0); (5,09; 0)

• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = -2\cos 2x - \cos x$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow -2\cos 2x - \cos x = 0$$

$$-2(\cos^2 x - \sin^2 x) - \cos x = 0$$

$$-2\cos^2 x + 2\sin^2 x - \cos x = 0$$

$$-2\cos^2 x + 2(1 - \cos^2 x) - \cos x = 0$$

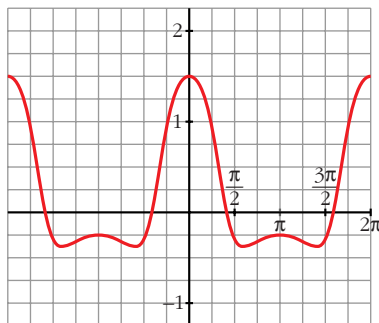
$$-2\cos^2 x + 2 - 2\cos^2 x - \cos x = 0$$

$$-4\cos^2 x - \cos x + 2 = 0$$

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 32}}{-8} \begin{cases} \cos x = -0,843 \\ \cos x = 0,593 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos x = -0,843 \begin{cases} x = 2,57 \\ x = 3,71 \end{cases} \\ \cos x = 0,593 \begin{cases} x = 0,94 \\ x = 5,35 \end{cases} \end{array} \right\} \text{Puntos: } \begin{array}{l} (2,57; -0,63) \\ (3,71; -0,63) \\ (0,94; 0,44) \\ (5,35; 0,45) \end{array}$$

• **Gráfica:**



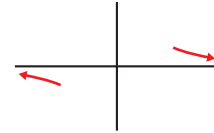
## Página 341

### 1. ¿Qué tipo de ramas en el infinito tienen?

a)  $y = \frac{1}{x+1}$       b)  $y = \frac{3x}{x+1}$       c)  $y = \frac{x^2}{x+1}$       d)  $y = \frac{x^4}{x+1}$

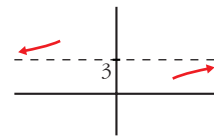
a)  $y = \frac{1}{x+1}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \rightarrow$  Asíntota horizontal:  $y = 0$



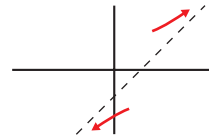
b)  $y = \frac{3x}{x+1}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 \rightarrow$  Asíntota horizontal:  $y = 3$



c)  $y = \frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1} \rightarrow$

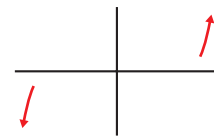
$\rightarrow$  Asíntota oblicua:  $y = x - 1$



d)  $y = \frac{x^4}{x+1}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{array} \right\}$$

Ramas parabólicas



### 2. ¿Qué tipo de ramas en el infinito tienen?

a)  $y = \frac{x^2}{e^x}$       b)  $y = \sqrt[3]{x^2 + 3}$       c)  $y = x + \sqrt{x}$   
 d)  $y = \operatorname{tg} x$       e)  $y = x \operatorname{sen} x$       f)  $y = x - \cos x$

a)  $y = \frac{x^2}{e^x}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty.$  Rama parabólica.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$  Asíntota horizontal:  $y = 0$



b)  $y = \sqrt[3]{x^2 + 3}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{array} \right\}$$

Ramas parabólicas



c)  $y = x + \sqrt{x}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  no existe, pues solo está definida en  $[0, +\infty)$ .

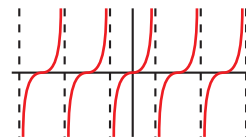
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x}\right) = 1 = m$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$



d)  $y = \operatorname{tg} x$

No existen  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ni  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .



e)  $y = x \operatorname{sen} x$

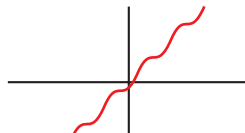
No existen  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ni  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .



f)  $y = x - \cos x$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1} \text{ no existe}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \cos x}{x} \text{ no existe}$$



## Página 348

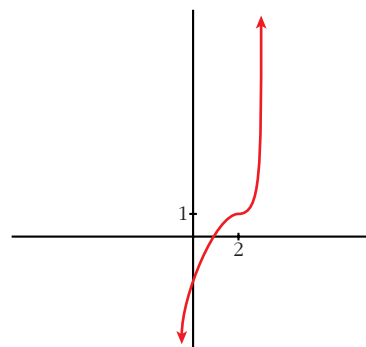
### EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

#### PARA PRACTICAR

- 1 Representa una función continua y derivable en  $\mathbb{R}$  tal que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad f'(2) = 0$$

$$f(2) = 1, \quad f'(x) \geq 0 \text{ para cualquier } x.$$

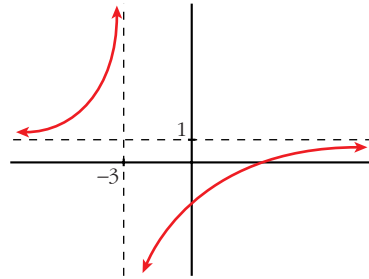


- 2 Representa una función que no esté definida en  $x = -3$  y tal que:

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1 \begin{cases} \text{si } x \rightarrow +\infty, f(x) < 1 \\ \text{si } x \rightarrow -\infty, f(x) > 1 \end{cases}$$

No tiene puntos singulares y es creciente.



- 3 De una función  $y = f(x)$  tenemos esta información:

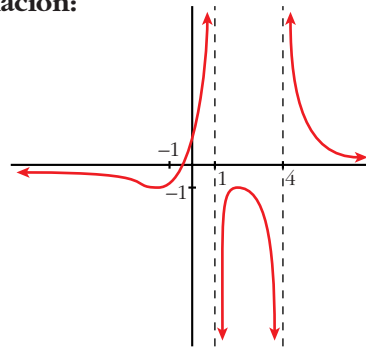
$$D = \mathbb{R} - \{1, 4\}; \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

(si  $x \rightarrow +\infty, f(x) > 0$ ; si  $x \rightarrow -\infty, f(x) < 0$ )

$$f'(2) = 0, f(2) = -1; f'(-1) = 0, f(-1) = -1$$

Representála.

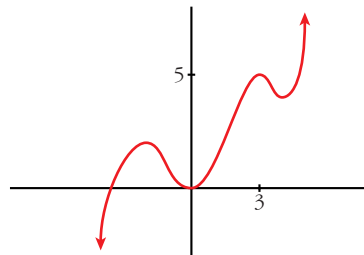


- 4 Dibuja la gráfica de una función de la que se conocen las siguientes propiedades:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 0 \text{ si } x = -2, x = 0, x = 3, x = 4$$

$$f(-2) = 2; f(0) = 0; f(3) = 5; f(4) = 4$$



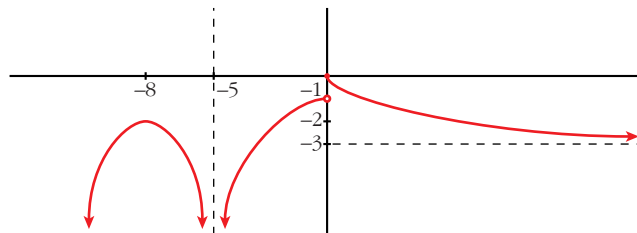
- 5 Dibuja la gráfica de una función que cumpla las siguientes propiedades:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3, \lim_{x \rightarrow -5} f(x) = -\infty$$

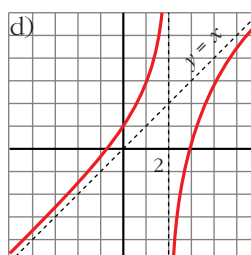
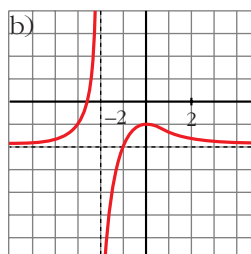
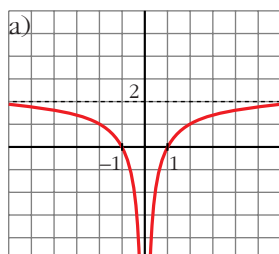
$f(-8) = -2, f(0) = 0$  es el único punto donde  $f(x)$  se anula.

$f'(-8) = 0$  y la derivada no se anula en ningún otro punto. Además,  $f'(x) < 0$  para todo  $x$  positivo.

La función es continua en toda la recta real, salvo en los puntos  $x = -5$  y  $x = 0$ .



- 6 Describe las siguientes funciones indicando sus asíntotas y ramas infinitas, sus puntos singulares y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.



- a) • Asíntota vertical:  $x = 0$ . Asíntota horizontal:  $y = 2$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

(si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) < 2$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) < 2$ )

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

- $f(x)$  no tiene puntos singulares.
- Decrece en  $(-\infty, 0)$  y crece en  $(0, +\infty)$ .

- b) • Asíntota vertical:  $x = -2$ . Asíntota horizontal:  $y = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$$

(si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) > -2$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > -2$ )

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

- Puntos singulares:  $f'(0) = 0$ ;  $f(0) = -1$ . Máximo en  $(0, -1)$
- Creciente en  $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$  y decreciente en  $(0, +\infty)$ .

- c) • Asíntota horizontal si  $x \rightarrow +\infty$ :  $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > 0$ )

- Puntos singulares:

$$f'(0) = 0; f(0) = 0. \text{ M\u00ednimo en } (0, 0)$$

$$f'(2) = 0; f(2) = 1. \text{ M\u00e1ximo en } (2, 1)$$

- Decreciente en  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$  y creciente en  $(0, 2)$ .

- d) • As\u00edntota vertical:  $x = 2$

$$\text{As\u00edntota oblicua: } y = x$$

$$(\text{si } x \rightarrow -\infty, f(x) > x; \text{ si } x \rightarrow +\infty, f(x) < x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

- Puntos singulares: no tiene.
- Creciente en  $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ .

**7 S** Se considera la funci\u00f3n  $f(x) = x^3 + 2x + 4$ . \u00bfTiene m\u00e1ximos y/o m\u00ednimos? \u00bfTiene alg\u00fan punto de inflexi\u00f3n? Haz una gr\u00e1fica aproximada de esta funci\u00f3n.

$$f(x) = x^3 + 2x + 4$$

- $f'(x) = 3x^2 + 2$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 = -2 \rightarrow \text{no tiene soluci\u00f3n.}$$

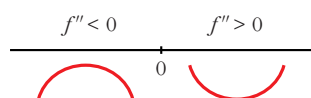
$$f'(x) > 0 \text{ para todo } x \rightarrow f(x) \text{ es creciente.}$$

No tiene m\u00e1ximos ni m\u00ednimos.

- $f''(x) = 6x$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0$$

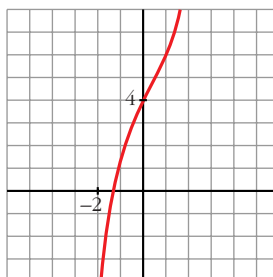
Signo de  $f''(x)$ :



Hay un punto de inflexi\u00f3n en  $(0, 4)$ .

- Adem\u00e1s,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- **Gr\u00e1fica:**



**8** Dada la función  $y = x^3 - 3x + 1$ , se pide:

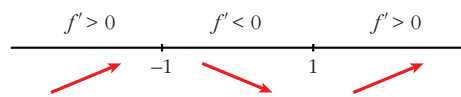
**S**

- a) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Extremos relativos.
- b) Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.
- c) Dibuja la gráfica a partir de los resultados anteriores.

a)  $f'(x) = 3x^2 - 3$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de  $f'(x)$ :



$f(x)$  es creciente en  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

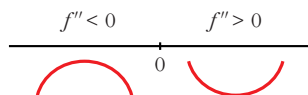
es decreciente en  $(-1, 1)$

tiene un máximo en  $(-1, 3)$  y un mínimo en  $(1, -1)$

b)  $f''(x) = 6x$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de  $f''(x)$ :

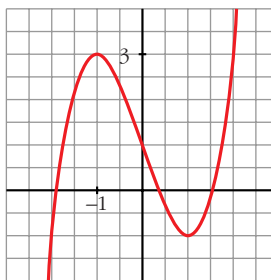


$f(x)$  es convexa en  $(-\infty, 0)$

es cóncava en  $(0, +\infty)$

tiene un punto de inflexión en  $(0, 1)$

c)



**9** En las siguientes funciones, estudia su dominio, asíntotas y posición de la curva respecto de estas, y represéntalas a partir de los resultados obtenidos:

a)  $y = \frac{1}{x^2 - 1}$

b)  $y = \frac{-1}{x^2 + 1}$

c)  $y = \frac{x}{x^2 - 1}$

$$d) y = \frac{x^2 - 1}{x}$$

$$e) y = \frac{x}{1 + x^2}$$

$$f) y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$$

$$a) y = \frac{1}{x^2 - 1}$$

• **Dominio:**  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

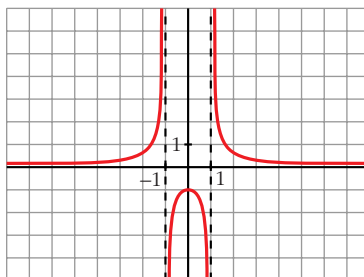
$y = 0$  es asíntota horizontal.

(si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) > 0$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > 0$ )

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

• **Gráfica:**



$$b) y = \frac{-1}{x^2 + 1}$$

• **Dominio:**  $\mathbb{R}$

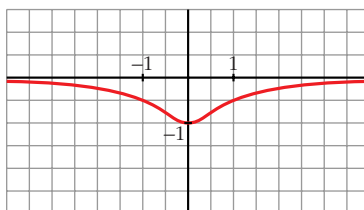
• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) < 0$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) < 0$ )

• **Gráfica:**



$$c) y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

• **Dominio:**  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

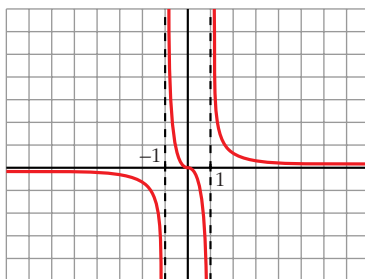
(si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) < 0$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > 0$ )

$y = 0$  es asíntota horizontal.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

• **Gráfica:**



$$d) y = \frac{x^2 - 1}{x} = x - \frac{1}{x}$$

• **Dominio:**  $\mathbb{R} - \{0\}$

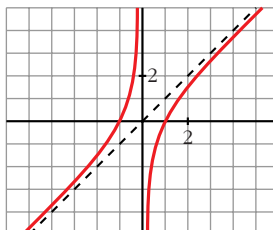
• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x$  es asíntota oblicua.

(si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) > x$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) < x$ )

• **Gráfica:**



$$e) y = \frac{x}{1+x^2}$$

• **Dominio:**  $\mathbb{R}$

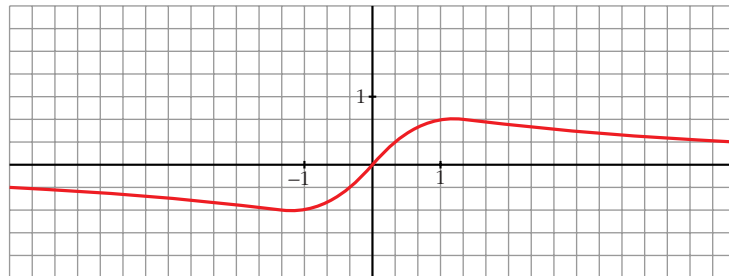
• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) < 0$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > 0$ )

• **Gráfica:**



$$f) y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$$

• **Dominio:**

$$x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

$$D = \mathbb{R}$$

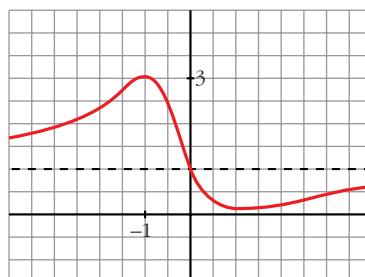
• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

(si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) > 1$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) < 1$ )

$y = 1$  es asíntota horizontal.

• **Gráfica:**



10 Representa las siguientes funciones estudiando previamente:

— Dominio de definición, asíntotas y posición de la curva respecto de estas.

— Intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y extremos relativos.

a)  $y = 2x + \frac{8}{x}$

b)  $y = \frac{2x}{(x+1)^2}$

c)  $y = \frac{x^3}{x^2-4}$

d)  $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$

e)  $y = \frac{4x-12}{(x-2)^2}$

f)  $y = \frac{x}{(x-2)^2}$

g)  $y = \frac{(x-1)(x-3)}{x-2}$

h)  $y = \frac{x^2}{9-x^2}$

i)  $y = \frac{x^2+4}{x}$

j)  $y = \frac{x^2}{(x-3)^2}$

k)  $y = \frac{2x^3}{x^2+1}$

l)  $y = \frac{x^4}{x^2-4}$

m)  $y = \frac{x^3}{x+2}$

n)  $y = \frac{(x-2)^2}{x-1}$

a)  $y = 2x + \frac{8}{x}$

• **Dominio:**  $\mathbb{R} - \{0\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = 2x$  es asíntota oblicua.

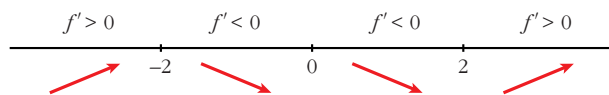
(si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) < 2x$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > 2x$ )

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{2x^2 - 8}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 = 4 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



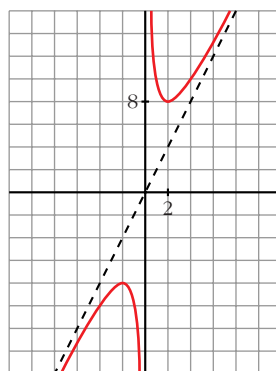
$f(x)$  es creciente en  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en  $(-2, 0) \cup (0, 2)$

tiene un máximo en  $(-2, -8)$

tiene un mínimo en  $(2, 8)$

• **Gráfica:**



b)  $y = \frac{2x}{(x+1)^2}$

• **Dominio:**  $\mathbb{R} - \{-1\}$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) < 0$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > 0$ )

$y = 0$  es asíntota horizontal.

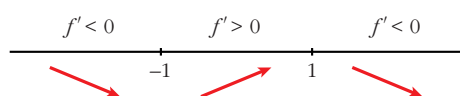
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{2(x+1)^2 - 2x \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)(2x+2-4x)}{(x+1)^4} = \frac{-2x+2}{(x+1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x+2 = 0 \rightarrow x = 1$$

Signo de  $f'(x)$ :

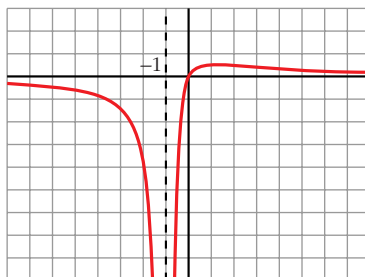


$f(x)$  es decreciente en  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

es creciente en  $(-1, 1)$

tiene un máximo en  $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

• **Gráfica:**



c)  $y = \frac{x^3}{x^2 - 4} = x + \frac{4x}{x^2 - 4}$

• **Dominio:**  $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = -2 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x$  es asíntota oblicua.

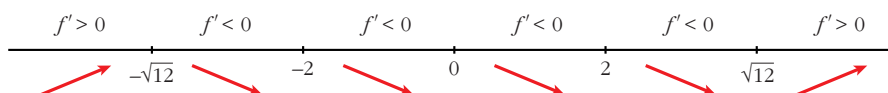
(si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) < x$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > x$ )

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(x^2 - 12) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{12} \\ x = \sqrt{12} \end{cases}$$

Signo de  $f'(x)$ :



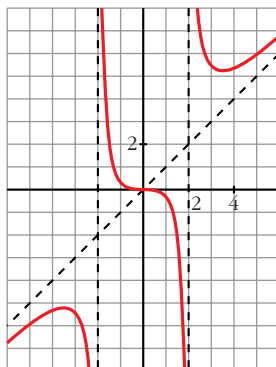
$f(x)$  es creciente en  $(-\infty, -\sqrt{12}) \cup (\sqrt{12}, +\infty)$

es decreciente en  $(-\sqrt{12}, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \sqrt{12})$

tiene un máximo en  $(-\sqrt{12}, -3\sqrt{3})$

tiene un mínimo en  $(\sqrt{12}, 3\sqrt{3})$

• **Gráfica:**



$$d) y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = x - 1 + \frac{1}{x - 1}$$

• **Dominio:**  $\mathbb{R} - \{1\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x - 1$  es asíntota oblicua.

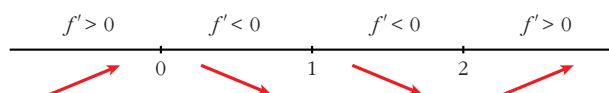
(si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) < x - 1$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > x - 1$ )

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de  $f'(x)$ :



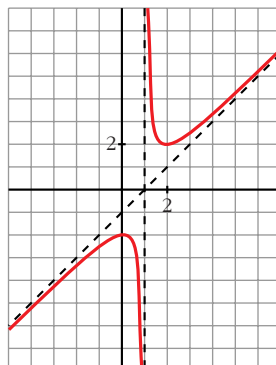
$f(x)$  es creciente en  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en  $(0, 1) \cup (1, 2)$

tiene un máximo en  $(0, -2)$

tiene un mínimo en  $(2, 2)$

• **Gráfica:**



e)  $y = \frac{4x - 12}{(x - 2)^2}$

• **Dominio:**  $\mathbb{R} - \{2\}$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) < 0$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > 0$ )

$y = 0$  es asíntota oblicua.

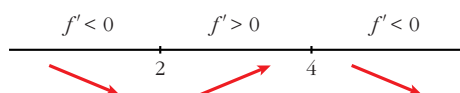
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4(x-2)^2 - (4x-12) \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{4(x-2) - 2(4x-12)}{(x-2)^3} = \\ &= \frac{4x - 8 - 8x + 24}{(x-2)^3} = \frac{-4x + 16}{(x-2)^3} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -4x + 16 = 0 \rightarrow x = 4$$

Signo de  $f'(x)$ :

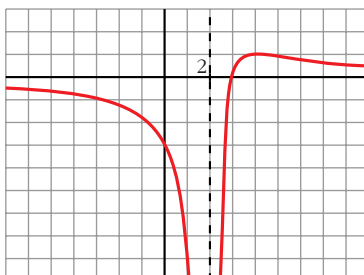


$f(x)$  es decreciente en  $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

es creciente en  $(2, 4)$

tiene un máximo en  $(4, 1)$

• **Gráfica:**



f)  $y = \frac{x}{(x-2)^2}$

• **Dominio:**  $\mathbb{R} - \{2\}$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) < 0$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > 0$ )

$y = 0$  es asíntota horizontal.

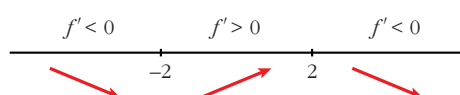
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{(x-2)^2 - x \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{x-2-2x}{(x-2)^3} = \frac{-x-2}{(x-2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -x-2 = 0 \rightarrow x = -2$$

Signo de  $f'(x)$ :

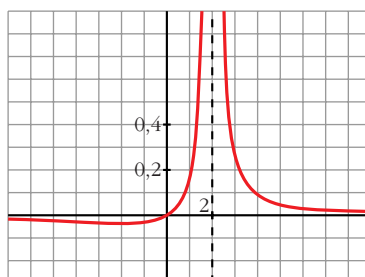


$f(x)$  es decreciente en  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

es creciente en  $(-2, 2)$

tiene un mínimo en  $\left(-2, \frac{-1}{8}\right)$

• **Gráfica:**



$$g) y = \frac{(x-1)(x-3)}{x-2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{x-2} = x - 2 - \frac{1}{x-2}$$

• **Dominio:**  $\mathbb{R} - \{2\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x - 2$  es asíntota oblicua.

(si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) > x - 2$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) < x - 2$ )

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

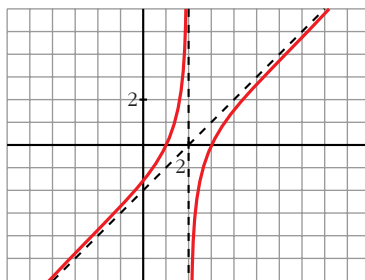
$$f'(x) = 1 + \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow (x-2)^2 + 1 = 0 \rightarrow \text{no tiene solución}$$

$f(x)$  no tiene extremos relativos.

$f'(x) > 0$  para todo  $x \rightarrow f(x)$  es creciente en todo su dominio.

• **Gráfica:**



$$h) y = \frac{x^2}{9-x^2}$$

• **Dominio:**  $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$$

(si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) < -1$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) < -1$ )

$y = -1$  es asíntota horizontal.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = -3 \text{ es asíntota vertical}$$

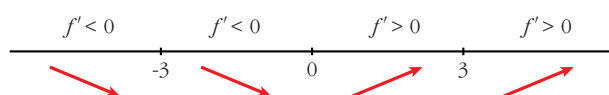
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 3 \text{ es asíntota vertical}$$

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{2x(9-x^2) - x^2 \cdot (-2x)}{(9-x^2)^2} = \frac{18x - 2x^3 + 2x^3}{(9-x^2)^2} = \frac{18x}{(9-x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 18x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de  $f'(x)$ :

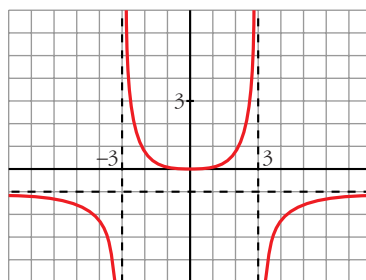


$f(x)$  es decreciente en  $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$

es creciente en  $(0, 3) \cup (3, +\infty)$

tiene un mínimo en  $(0, 0)$

• **Gráfica:**



i)  $y = \frac{x^2 + 4}{x} = x + \frac{4}{x}$

• **Dominio:**  $\mathbb{R} - \{0\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x$  es asíntota oblicua.

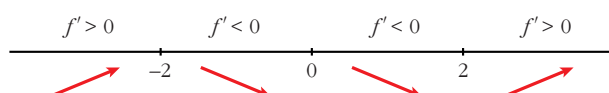
(si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) < x$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > x$ )

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$$

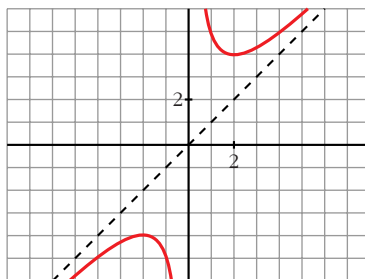
$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de  $f'(x)$ :



- $f(x)$  es creciente en  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
- es decreciente en  $(-2, 0) \cup (0, 2)$
- tiene un máximo en  $(-2, -4)$
- tiene un mínimo en  $(2, 4)$

• **Gráfica:**



j)  $y = \frac{x^2}{(x-3)^2}$

- **Dominio:**  $\mathbb{R} - \{3\}$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

(si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) < 1$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > 1$ )

$y = 1$  es asíntota horizontal.

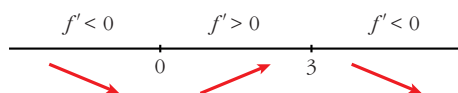
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 3 \text{ es asíntota vertical}$$

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x-3)^2 - x^2 \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{2x(x-3) - 2x^2}{(x-3)^3} = \\ &= \frac{2x^2 - 6x - 2x^2}{(x-3)^3} = \frac{-6x}{(x-3)^3} \end{aligned}$$

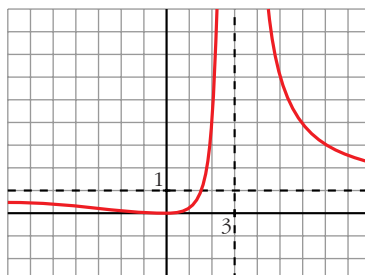
$$f'(x) = 0 \rightarrow -6x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de  $f'(x)$ :



- $f(x)$  es decreciente en  $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$
- es creciente en  $(0, 3)$
- tiene un mínimo en  $(0, 0)$

• **Gráfica:**



k)  $y = \frac{2x^3}{x^2 + 1} = 2x - \frac{2x}{x^2 + 1}$

• **Dominio:**  $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$y = 2x$  es asíntota oblicua.

(Si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) > 2x$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) < 2x$ ).

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{6x^2(x^2 + 1) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{6x^4 + 6x^2 - 4x^4}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^4 + 6x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

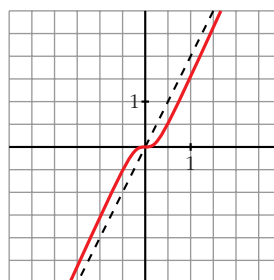
$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2(x^2 + 3) = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de  $f'(x)$ :

$f'(x) > 0$  para todo  $x \neq 0$

$f(x)$  es creciente en todo  $\mathbb{R}$ .

• **Gráfica:**



l)  $y = \frac{x^4}{x^2 - 4}$

• **Dominio:**  $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -2 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

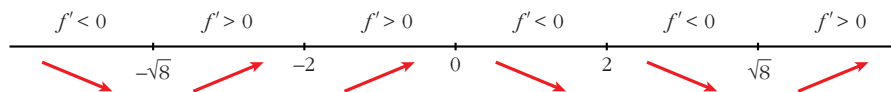
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{array} \right\} \text{Ramas parabólicas}$$

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4x^3(x^2 - 4) - x^4 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{4x^5 - 16x^3 - 2x^5}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^5 - 16x^3}{(x^2 - 4)^2} = \\ &= \frac{2x^3(x^2 - 8)}{(x^2 - 4)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^3(x^2 - 8) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{8} \\ x = \sqrt{8} \end{cases}$$

Signo de  $f'(x)$ :



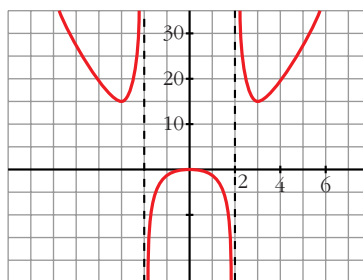
$f(x)$  es decreciente en  $(-\infty, -\sqrt{8}) \cup (0, 2) \cup (2, \sqrt{8})$

es creciente en  $(-\sqrt{8}, -2) \cup (-2, 0) \cup (\sqrt{8}, +\infty)$

tiene un mínimo en  $(-\sqrt{8}, 16)$  y otro en  $(\sqrt{8}, 16)$

tiene un máximo en  $(0, 0)$

• **Gráfica:**



m)  $y = \frac{x^3}{x+2}$

• **Dominio:**  $\mathbb{R} - \{-2\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -2 \text{ es asíntota vertical}$$

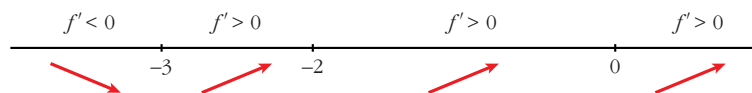
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{array} \right\} \text{Ramas parabólicas}$$

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x+2) - x^3}{(x+2)^2} = \frac{3x^3 + 6x^2 - x^3}{(x+2)^2} = \frac{2x^3 + 6x^2}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2(x+3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

Signo de  $f'(x)$ :



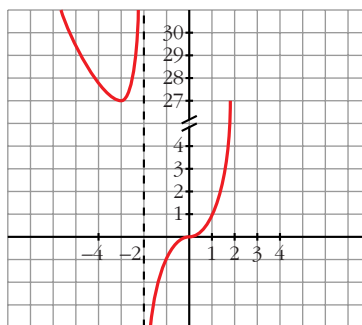
$f(x)$  es decreciente en  $(-\infty, -3)$

es creciente en  $(-3, -2) \cup (-2, +\infty)$

tiene un mínimo en  $(-3, 27)$

tiene un punto de inflexión en  $(0, 0)$

• **Gráfica:**



n)  $y = \frac{(x-2)^2}{x-1} = x - 3 + \frac{1}{x-1}$

• **Dominio:**  $\mathbb{R} - \{1\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x - 3$  es asíntota oblicua.

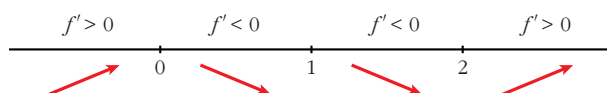
(Si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) < x - 3$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > x - 3$ ).

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de  $f'(x)$ :



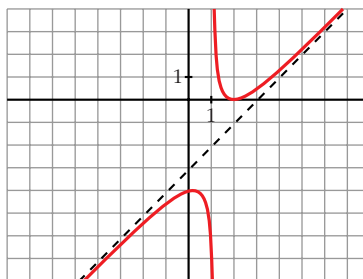
$f(x)$  es creciente en  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en  $(0, 1) \cup (1, 2)$

tiene un máximo en  $(0, -4)$

tiene un mínimo en  $(2, 0)$

• **Gráfica:**



**11 S** a) **Halla las asíntotas de la gráfica de la función definida para  $x > 0$  por**

$$f(x) = \frac{1+x^2}{x}.$$

**b) Halla las regiones de crecimiento y de decrecimiento de  $f$  indicando sus máximos y mínimos locales y globales, si los hay.**

**c) Esboza la gráfica de  $f$ .**

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \rightarrow x = 0$  es asíntota vertical.

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \rightarrow y = x \text{ es asíntota oblicua.}$$

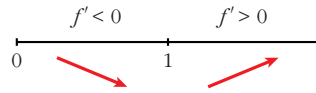
(Si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > x$ )

$$b) f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \begin{cases} x = -1 \text{ (no vale)} \\ x = 1 \end{cases}$$

( $x = -1$  no vale, pues  $f(x)$  está definida solamente para  $x > 0$ )

Signo de  $f'(x)$ :



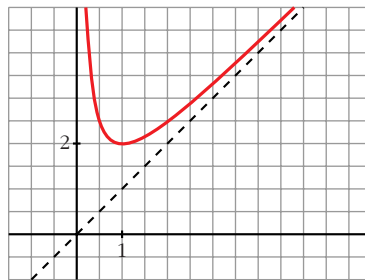
$f(x)$  es decreciente en  $(0, 1)$

es creciente en  $(1, +\infty)$

tiene un mínimo (local y global) en  $(1, 2)$

no tiene un máximo

c)



**12** Dada la función  $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ , se pide:

**S**

a) Dominio de definición, asíntotas y posición de la curva respecto a estas.

b) Máximos y mínimos relativos, e intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) Dibuja la gráfica de  $f$ .

a) • **Dominio:**  $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+1}{\sqrt{x^2+1}} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

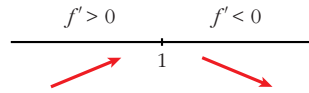
$y = -1$  es asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow -\infty$  ( $f(x) > -1$ )

$y = 1$  es asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow +\infty$  ( $f(x) > 1$ )

$$b) f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x+1) \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(x^2+1)} = \frac{x^2+1-x^2-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = \frac{1-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

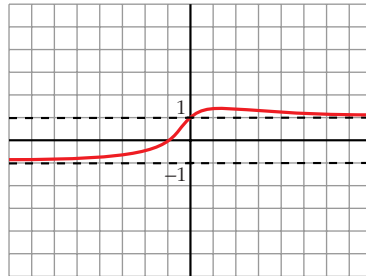
$$f'(x) = 0 \rightarrow 1-x = 0 \rightarrow x = 1$$

Signo de  $f'(x)$ :



$f(x)$  es creciente en  $(-\infty, 1)$   
 es decreciente en  $(1, +\infty)$   
 tiene un máximo en  $(1, \sqrt{2})$

c)



**13** Representa gráficamente la función:  $p(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - 2$   
**S** ¿Cuántas raíces reales tiene este polinomio  $p(x)$ ?

$$p(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - 2$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$

- $p'(x) = 4x^3 + 4x^2 + 4x = 4x(x^2 + x + 1)$

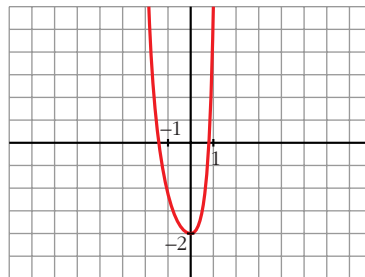
$$p'(x) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Hay un punto singular en } (0, -2).$$

- $p''(x) = 12x^2 + 8x + 4 = 4(3x^2 + 2x + 1)$

$$p''(x) = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{6} \rightarrow \text{no tiene solución.}$$

$p(x)$  no tiene puntos de inflexión.

- **Gráfica:**



- $f(x)$  tiene dos raíces reales.

**14 S** Dadas las siguientes funciones, halla sus asíntotas, estudia el crecimiento y la existencia de máximos y mínimos. Dibuja su gráfica:

a)  $y = \frac{e^x}{x^2 - 3}$

b)  $y = \frac{x^3}{4x^2 + 1}$

c)  $y = x + \frac{4}{(x-1)^2}$

d)  $y = \sqrt{x^2 - 4} - x - 2$

a)  $y = \frac{e^x}{x^2 - 3}$

• **Dominio:**  $\mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -\sqrt{3} \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = \sqrt{3} \text{ es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2 - 3} = 0 \rightarrow y = 0 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \rightarrow -\infty$$

$(f(x) > 0)$

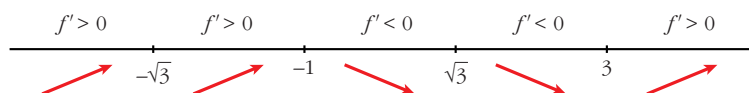
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

• **Crecimiento, máximos y mínimos:**

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 - 3) - e^x \cdot 2x}{(x^2 - 3)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x - 3)}{(x^2 - 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Signo de  $f'(x)$ :



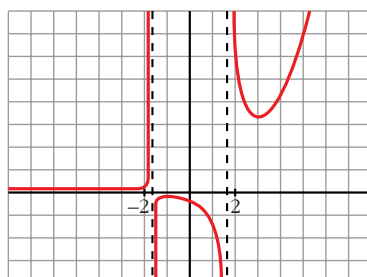
$f(x)$  es creciente en  $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, -1) \cup (3, +\infty)$

es decreciente en  $(-1, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 3)$

tiene un máximo en  $(-1, \frac{-1}{2e})$

tiene un mínimo en  $(3, \frac{e^3}{6})$

• **Gráfica:**



$$b) y = \frac{x^3}{4x^2 + 1} = \frac{1}{4}x - \frac{(1/4)x}{4x^2 + 1}$$

• **Dominio:**  $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$y = \frac{1}{4}x$  es asíntota oblicua.

(Si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) > \frac{1}{4}x$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) < \frac{1}{4}x$ )

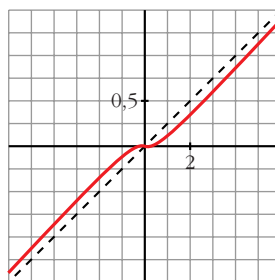
• **Crecimiento, máximos y mínimos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(4x^2 + 1) - x^3 \cdot 8x}{(4x^2 + 1)^2} = \frac{12x^4 + 3x^2 - 8x^4}{(4x^2 + 1)^2} = \frac{4x^4 + 3x^2}{(4x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(4x^2 + 3) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$$

$f'(x) > 0$  si  $x \neq 0 \rightarrow f(x)$  es creciente (tiene un punto de inflexión en  $(0, 0)$ )

• **Gráfica:**



$$c) y = x + \frac{4}{(x-1)^2}$$

• **Dominio:**  $\mathbb{R} - \{1\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x$  es asíntota oblicua.

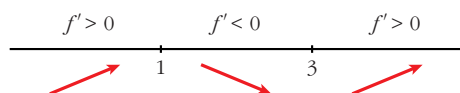
(Si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) > x$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > x$ ).

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{8}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)^3 - 8}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow (x-1)^3 = 8 \rightarrow x-1 = 2 \rightarrow x = 3$$

Signo de  $f'(x)$ :

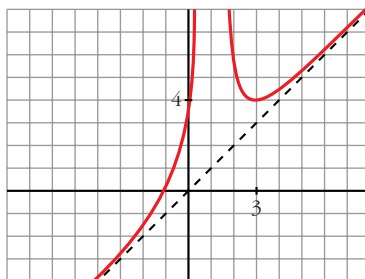


$f(x)$  es creciente en  $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

es decreciente en  $(1, 3)$

tiene un mínimo en  $(3, 4)$

• **Gráfica:**



d)  $y = \sqrt{x^2 - 4} - x - 2$

• **Dominio:**  $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 4} + x - 2] = +\infty$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4} + x - 2}{-x} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 4} + x - 2 - 2x] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 4} - x - 2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 4} - (x + 2)] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{x^2 - 4} - (x + 2)][\sqrt{x^2 - 4} + (x + 2)]}{[\sqrt{x^2 - 4} + (x + 2)]} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4 - (x + 2)^2}{\sqrt{x^2 - 4} + x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4 - x^2 - 4x - 4}{\sqrt{x^2 - 4} + x + 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x - 8}{\sqrt{x^2 - 4} + x + 2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$y = -2x - 2$  es asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

$$(f(x) < -2x - 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 4} - x - 2] = -2$$

$y = -2$  es asíntota horizontal.

$$(f(x) < -2)$$

• **Crecimiento, máximos y mínimos:**

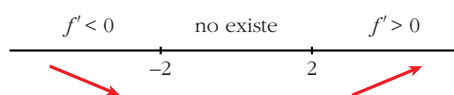
$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 4}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

$f(x)$  no es derivable en  $x = -2$  ni en  $x = 2$ .

$$f'(x) = 0 \rightarrow x - \sqrt{x^2 - 4} = 0 \rightarrow x = \sqrt{x^2 - 4} \rightarrow x = x^2 - 4 \rightarrow$$

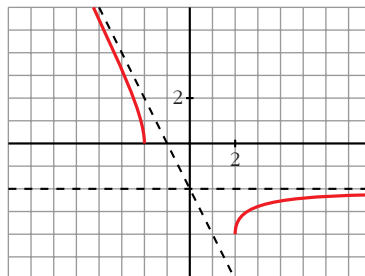
$$\rightarrow \text{no tiene solución} \rightarrow \text{no hay puntos singulares}$$

Signo de  $f'(x)$ :



$f(x)$  es decreciente en  $(-\infty, -2)$  y es creciente en  $(2, +\infty)$ .

• **Gráfica:**



**15** Estudia los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:

a)  $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$       b)  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$       c)  $y = \text{sen } x + \text{cos } x$  para  $0 \leq x \leq 2\pi$

a)  $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{senh } x$ . Esta función se denomina seno hiperbólico de  $x$ .

•  $f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$f'(x) = 0 \rightarrow e^x + e^{-x} = 0 \rightarrow \text{no tiene solución} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{no hay máximos ni mínimos}$$

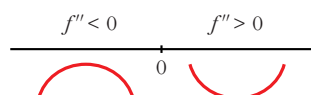
$$f'(x) > 0 \text{ para todo } x \rightarrow f(x) \text{ es creciente}$$

- $f''(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$f''(x) = 0 \rightarrow e^x - e^{-x} = 0 \rightarrow e^x - \frac{1}{e^x} = 0 \rightarrow e^{2x} - 1 = 0$$

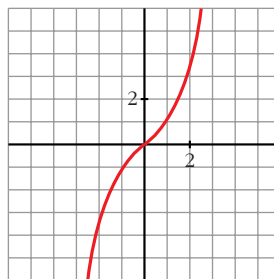
$$e^{2x} = 1 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0$$

Signo de  $f''(x)$ :



Hay un punto de inflexión en  $(0, 0)$ .

- **Gráfica:**

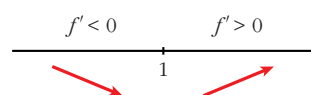


b)  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$ . Esta función se denomina coseno hiperbólico de  $x$ .

- $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$f'(x) = 0 \rightarrow e^x - e^{-x} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 1$$

Signo de  $f'(x)$ :

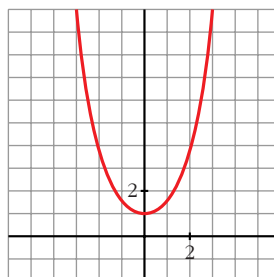


Hay un mínimo en  $(0, 1)$ .

- $f''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$f''(x) = 0 \rightarrow \text{no tiene solución} \rightarrow \text{no hay puntos de inflexión}$$

- **Gráfica:**

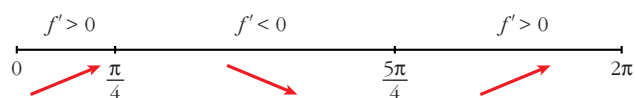


c)  $y = \text{sen } x + \text{cos } x$  para  $0 \leq x \leq 2\pi$

•  $f'(x) = \text{cos } x - \text{sen } x$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \text{cos } x = \text{sen } x \rightarrow \text{tg } x = 1 \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

Signo de  $f'(x)$ :

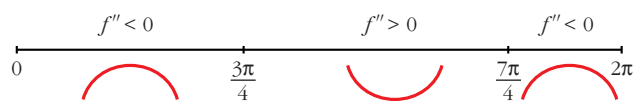


Hay un máximo en  $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$  y un mínimo en  $\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$ .

•  $f''(x) = -\text{sen } x - \text{cos } x$

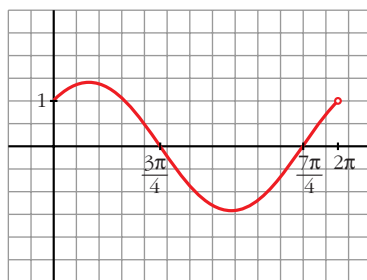
$$f''(x) = 0 \rightarrow \text{sen } x = -\text{cos } x \rightarrow \text{tg } x = -1 \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} \\ x = \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

Signo de  $f''(x)$ :



Hay un punto de inflexión en  $\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$  y otro en  $\left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$ .

• **Gráfica:**



**16 Representa las siguientes funciones:**

**a)**  $y = \frac{x}{e^x}$

**b)**  $y = \frac{\ln x}{x}$

**c)**  $y = x \ln x$

**d)**  $y = (x - 1)e^x$

**e)**  $y = e^{-x^2}$

**f)**  $y = x^2 e^{-x}$

**g)**  $y = \frac{x^3}{\ln x}$

**h)**  $y = \ln(x^2 - 1)$

$$a) y = \frac{x}{e^x}$$

• **Dominio:**  $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

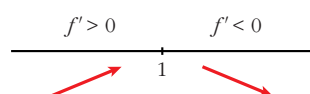
$y = 0$  es asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow +\infty$  ( $f(x) > 0$ ).

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 1-x=0 \rightarrow x=1$$

Signo de  $f'(x)$



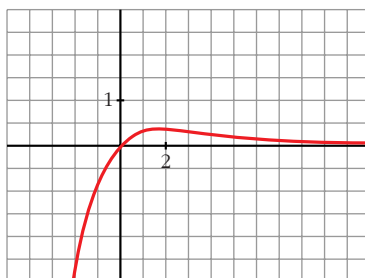
$f(x)$  es creciente en  $(-\infty, 1)$

es decreciente en  $(1, +\infty)$

tiene un máximo en  $\left(1, \frac{1}{e}\right)$

• Corta a los ejes en el punto  $(0, 0)$ .

• **Gráfica:**



$$b) y = \frac{\ln x}{x}$$

• **Dominio:**  $(0, +\infty)$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \rightarrow x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{x} = 0$$

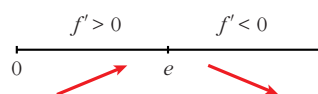
$y = 0$  es asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow +\infty$  ( $f(x) > 0$ ).

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{(1/x) \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e$$

Signo de  $f'(x)$ :



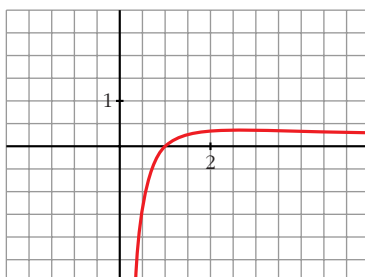
$f(x)$  es creciente en  $(0, e)$

es decreciente en  $(e, +\infty)$

tiene un máximo en  $\left(e, \frac{1}{e}\right)$

• Corta al eje  $X$  en  $(1, 0)$ .

• **Gráfica:**



c)  $y = x \ln x$

• **Dominio:**  $(0, +\infty)$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

No tiene asíntotas verticales.

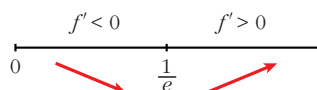
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \ln x = -1 \rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Signo de  $f'(x)$ :



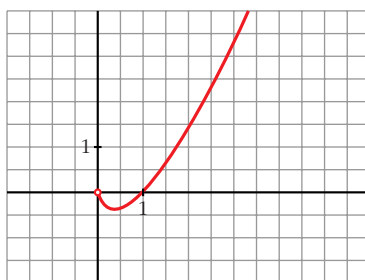
$f(x)$  es decreciente en  $\left(0, \frac{1}{e}\right)$

es creciente en  $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

tiene un mínimo en  $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$

- Corta al eje  $X$  en  $(1, 0)$ .

- **Gráfica:**



d)  $y = (x - 1)e^x$

- **Dominio:**  $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x - 1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - 1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$$

$y = 0$  es asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow -\infty$  ( $f(x) < 0$ ).

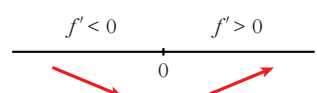
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = e^x + (x - 1)e^x = e^x(1 + x - 1) = xe^x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$$

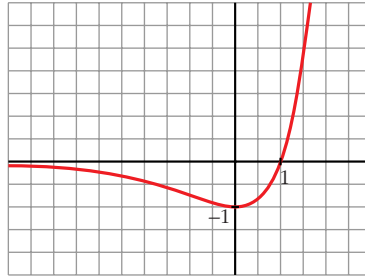
Signo de  $f'(x)$ :



$f(x)$  es decreciente en  $(-\infty, 0)$   
 es creciente en  $(0, +\infty)$   
 tiene un mínimo en  $(0, -1)$

• Corta al eje  $X$  en  $(1, 0)$ .

• **Gráfica:**



e)  $y = e^{-x^2}$

• **Dominio:**  $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

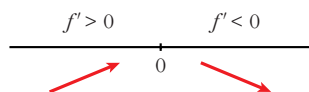
$y = 0$  es asíntota horizontal ( $f(x) > 0$  para todo  $x$ ).

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de  $f'(x)$ :

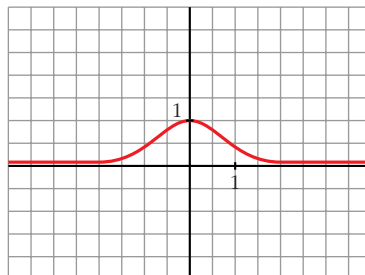


$f(x)$  es creciente en  $(-\infty, 0)$

es decreciente en  $(0, +\infty)$

tiene un máximo en  $(0, 1)$

• **Gráfica:**



f)  $y = x^2 e^{-x}$

• **Dominio:**  $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

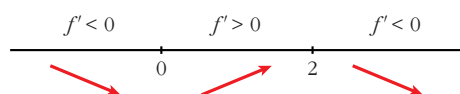
$y = 0$  es asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow +\infty$  ( $f(x) > 0$ ).

• **Puntos singulares:**  $y = \frac{x^2}{e^x}$

$$f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(2x - x^2)}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - x^2 = 0 \rightarrow x(2 - x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de  $f'(x)$ :



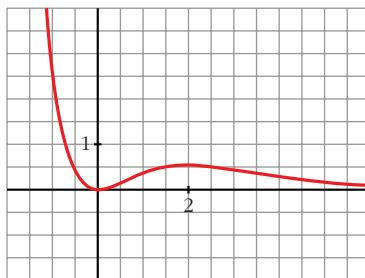
$f(x)$  es decreciente en  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

es creciente en  $(0, 2)$

tiene un mínimo en  $(0, 0)$

tiene un máximo en  $\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$

• **Gráfica:**



g)  $y = \frac{x^3}{\ln x}$

• **Dominio:**

$\ln x = 0 \rightarrow x = 1$ . Además, ha de ser  $x > 0$ .

$$D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

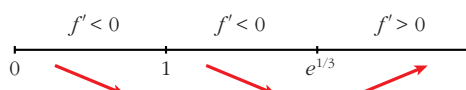
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{3x^2 \ln x - x^3 \cdot (1/x)}{(\ln x)^2} = \frac{3x^2 \ln x - x^2}{(\ln x)^2} = \frac{x^2(3 \ln x - 1)}{(\ln x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(3 \ln x - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ (no vale)} \\ \ln x = 1/3 \rightarrow x = e^{1/3} \end{cases}$$

Signo de  $f'(x)$ :

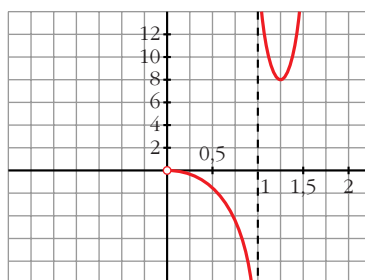


$f(x)$  es decreciente en  $(0, 1) \cup (1, e^{1/3})$

es creciente en  $(e^{1/3}, +\infty)$

tiene un mínimo en  $(e^{1/3}, 3e)$

• **Gráfica:**



h)  $y = \ln(x^2 - 1)$

• **Dominio:**  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \rightarrow x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \rightarrow x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{array} \right\} \text{Ramas parabólicas}$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

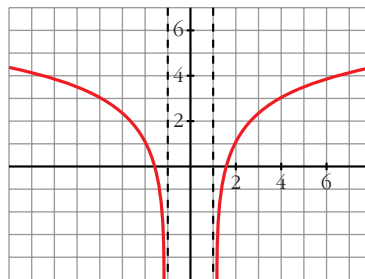
No hay puntos singulares ( $x = 0$  no pertenece al dominio).

• **Puntos de corte con el eje X:**

$$\ln(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 1 \rightarrow x^2 = 2 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Puntos:  $(-\sqrt{2}, 0)$  y  $(\sqrt{2}, 0)$

• **Gráfica:**



**17** Estudia y representa las siguientes funciones:

a)  $y = \sqrt[3]{4 - x^2}$

b)  $y = \sqrt{x^2 - x}$

c)  $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

d)  $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

a)  $y = \sqrt[3]{4 - x^2}$

• **Dominio:**  $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

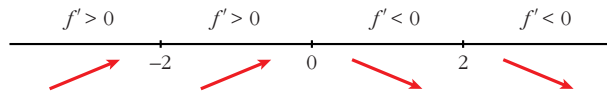
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{array} \right\} \text{Ramas parabólicas}$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(4 - x^2)^2}} \rightarrow f(x) \text{ NO es derivable en } x = -2 \text{ ni en } x = 2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de  $f'(x)$



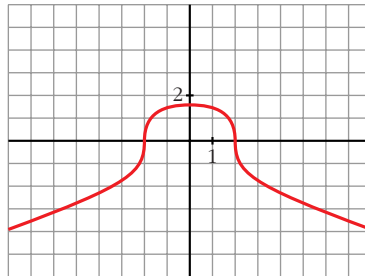
$f(x)$  es creciente en  $(-\infty, 0)$

es decreciente en  $(0, +\infty)$

tiene un máximo en  $(0, \sqrt[3]{4})$

- Corta al eje  $X$  en  $(-2, 0)$  y en  $(2, 0)$ .

- **Gráfica:**



b)  $y = \sqrt{x^2 - x}$

- **Dominio:**  $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{-x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + x} - x] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{x^2 + x} - x][\sqrt{x^2 + x} + x]}{(\sqrt{x^2 + x} + x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{2}$$

$y = -x + \frac{1}{2}$  es asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow -\infty$  ( $f(x) < -x + \frac{1}{2}$ ).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - x} - x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{x^2 - x} - x][\sqrt{x^2 - x} + x]}{(\sqrt{x^2 - x} + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

$y = x - \frac{1}{2}$  es asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow +\infty$  ( $f(x) < x - \frac{1}{2}$ ).

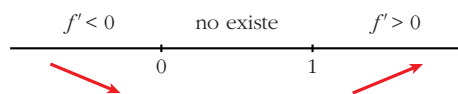
• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

No tiene puntos singulares (en  $x = \frac{1}{2}$  no está definida  $f(x)$ ).

Signo de  $f'(x)$ :

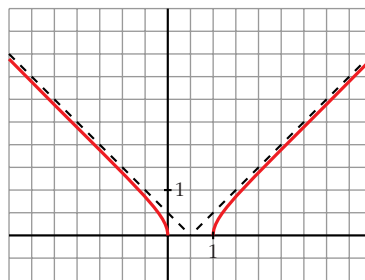


$f(x)$  es decreciente en  $(-\infty, 0]$

es creciente en  $[1, +\infty)$

• Pasa por  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$ .

• **Gráfica:**



c)  $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

• **Dominio:**

$$x^2 - 4x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} \rightarrow \text{no tiene solución}$$

$f(x) > 0$  para todo  $x$

$$D = \mathbb{R}$$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}{-x} = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x)(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x)}{(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 5}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x} = \\ &= \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

$y = -x + 2$  es asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow -\infty$  ( $f(x) > -x + 2$ ).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 4x + 5} - x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 4x + 5} - x)(\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x)}{(\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x + 5}{\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x} = \\ &= \frac{-4}{2} = -2 \end{aligned}$$

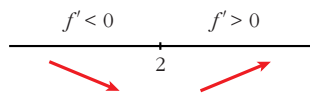
$y = x - 2$  es asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow +\infty$  ( $f(x) > x - 2$ ).

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}} = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

Signo de  $f'(x)$

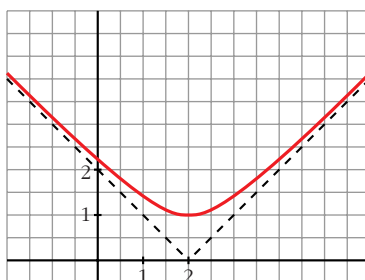


$f(x)$  es decreciente en  $(-\infty, 2)$

es creciente en  $(2, +\infty)$

tiene un mínimo en  $(2, 1)$

• **Gráfica:**



$$d) y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

• **Dominio:**  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

• **Simetrías:**  $f(-x) = f(x) \rightarrow f(x)$  es par: simétrica respecto al eje  $Y$ .

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \rightarrow x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \rightarrow x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - 1}} = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} - x \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - x\sqrt{x^2 - 1})(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1})}{(\sqrt{x^2 - 1})(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1})} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^2(x^2 - 1)}{(\sqrt{x^2 - 1})(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^4 + x^2}{(\sqrt{x^2 - 1})(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2 - 1} + x(x^2 - 1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2 - 1} + x^3 - x} = 0
\end{aligned}$$

$y = -x$  es asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow -\infty$  ( $f(x) > -x$ ).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 1$$

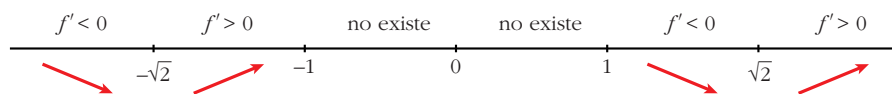
Como  $f(x)$  es par, la recta  $y = x$  es asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow +\infty$  ( $f(x) > x$ ).

• **Puntos singulares:**

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x\sqrt{x^2 - 1} - x^2 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}}{(x^2 - 1)} = \frac{2x(x^2 - 1) - x^3}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} = \frac{2x^3 - 2x - x^3}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} = \\
&= \frac{x^3 - 2x}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}
\end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x(x^2 - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ (no vale)} \\ x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Signo de  $f'(x)$

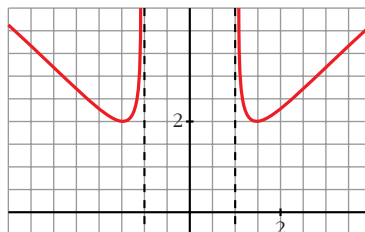


$f(x)$  es decreciente en  $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (1, \sqrt{2})$

es creciente en  $(-\sqrt{2}, -1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

tiene un mínimo en  $(-\sqrt{2}, 2)$  y otro en  $(\sqrt{2}, 2)$

• **Gráfica:**



**18** Estudia el dominio de definición, las asíntotas y los extremos de cada una de las siguientes funciones  $y$ , con esa información, trata de encontrar su gráfica entre las que están representadas a continuación:

a)  $y = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

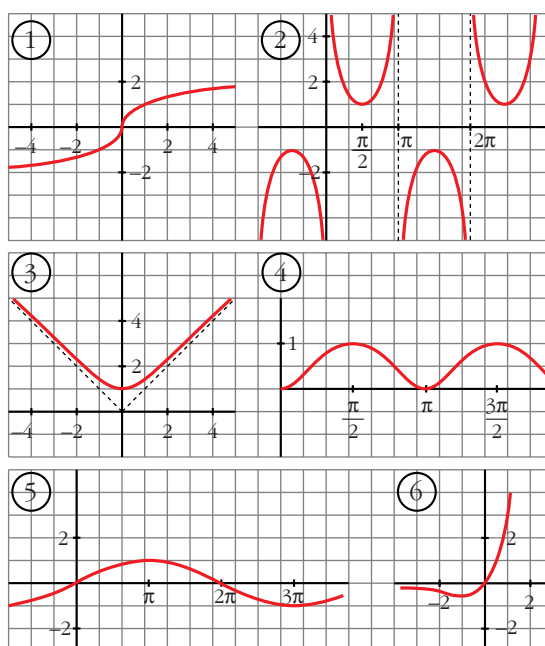
b)  $y = x e^x$

c)  $y = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$

d)  $y = \sqrt[3]{x}$

e)  $y = \sqrt{x^2 + 1}$

f)  $y = \operatorname{sen}^2 x$



a)  $y = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

• **Dominio:**

$$\operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = 0 + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$D = \mathbb{R} - \{\pi k\}, k \in \mathbb{Z}$$

• **Asíntotas:**

$x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$  son asíntotas verticales.

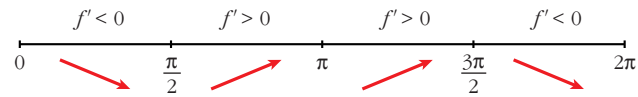
No hay más asíntotas.

• **Extremos:**

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \cos x = 0 \begin{cases} x = \pi/2 + 2\pi k \\ x = 3\pi/2 + 2\pi k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Signo de  $f'(x)$  en  $(0, 2\pi)$ :



$f(x)$  es periódica de periodo  $2\pi$ .

$f(x)$  es decreciente en  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

es creciente en  $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

tiene un mínimo en  $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

tiene un máximo en  $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$

• **Gráfica**  $\rightarrow$  (2)

b)  $y = xe^x$

• **Dominio:**  $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$$

$y = 0$  es asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow -\infty$  ( $f(x) < 0$ ).

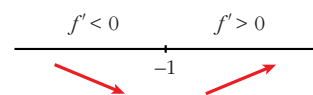
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

• **Extremos:**

$$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 1+x=0 \rightarrow x=-1$$

Signo de  $f'(x)$ :



$f(x)$  es decreciente en  $(-\infty, -1)$

es creciente en  $(-1, +\infty)$

tiene un mínimo en  $\left(-1, \frac{-1}{e}\right)$

• **Gráfica**  $\rightarrow$  (6)

c)  $y = \text{sen } \frac{x}{2}$

• **Dominio:**  $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:** No tiene.

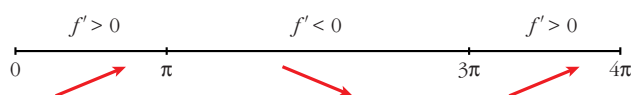
• **Extremos:**

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \cos \frac{x}{2} = 0 \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \rightarrow x = \pi + 2\pi k$$

$f(x)$  es periódica de periodo  $4\pi$ .

Signo de  $f'(x)$ :



$f(x)$  es creciente en  $(0, \pi) \cup (3\pi, 4\pi)$

es decreciente en  $(\pi, 3\pi)$

tiene un máximo en  $(\pi, 1)$

tiene un mínimo en  $(3\pi, -1)$

• **Gráfica**  $\rightarrow$  (5)

d)  $y = \sqrt[3]{x}$

• **Dominio:**  $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:** No tiene.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{array} \right\} \text{Ramas parabólicas}$$

• **Extremos:**

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \rightarrow f(x) \text{ no es derivable en } x = 0$$

$f'(x) > 0$  para todo  $x \neq 0$ .

$f(x)$  es creciente.

• **Gráfica**  $\rightarrow$  (1)

$$e) y = \sqrt{x^2 + 1}$$

• **Dominio:**  $\mathbb{R}$

• **Simetría:**

$$f(-x) = f(x) \rightarrow f(x) \text{ es par: simétrica respecto al eje } Y.$$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 1} - x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0 \end{aligned}$$

$y = x$  es asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow +\infty$  ( $f(x) > x$ ).

Por simetría:

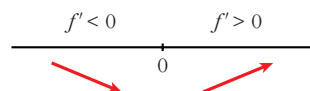
$y = -x$  es asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow -\infty$  ( $f(x) > -x$ ).

• **Extremos:**

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de  $f'(x)$ :



$f(x)$  es decreciente en  $(-\infty, 0)$

es creciente en  $(0, +\infty)$

tiene un mínimo en  $(0, 1)$

• **Gráfica**  $\rightarrow$  (3)

f)  $y = \text{sen}^2 x$

• **Dominio:**  $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:** No tiene.

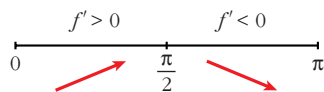
• **Extremos:**

$$f'(x) = 2\text{sen } x \cos x = \text{sen } 2x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \text{sen } 2x = 0 \rightarrow 2x = 0 + \pi k \rightarrow x = \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$$

$f(x)$  es periódica de periodo  $\pi$ .

Signo de  $f'(x)$  en  $(0, \pi)$ :



$f(x)$  es creciente en  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

es decreciente en  $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

tiene un máximo en  $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

tiene un mínimo en  $(0, 0)$  y otro en  $(\pi, 0)$

• **Gráfica**  $\rightarrow$  (4)

## Página 350

**19 S** La recta  $y = 2x + 6$  es una asíntota oblicua de la función  $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - k}$ . Halla el valor de  $k$  y representa la función.

• **Hallamos  $k$ :**

Si  $y = 2x + 6$  es asíntota oblicua, tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 6$$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - kx} = 2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{2x^2 + 1}{x - k} - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1 - 2x^2 + 2kx}{x - k} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2kx + 1}{x - k} = 2k = 6 \rightarrow k = 3 \end{aligned}$$

Luego:  $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 3}$

• **Dominio:**  $\mathbb{R} - \{3\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 3 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = 2x + 6$  es asíntota oblicua.

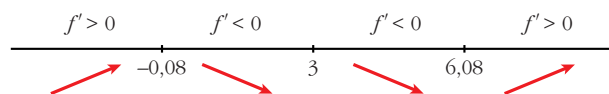
(Si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) < 2x + 6$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > 2x + 6$ )

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{4x(x-3) - (2x^2+1)}{(x-3)^2} = \frac{4x^2 - 12x - 2x^2 - 1}{(x-3)^2} = \frac{2x^2 - 12x - 1}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2 - 12x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 8}}{4} \begin{cases} x = 6,08 \\ x = -0,08 \end{cases}$$

Signo de  $f'(x)$ :



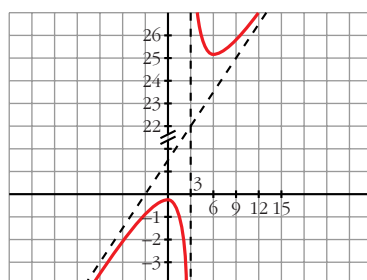
$f(x)$  es creciente en  $(-\infty; -0,08) \cup (6,08; +\infty)$

es decreciente en  $(-0,08; 3) \cup (3; 6,08)$

tiene un máximo en  $(-0,08; -0,33)$

tiene un mínimo en  $(6,08; 24,32)$

• **Gráfica:**



**20** Una partícula se mueve a lo largo de la gráfica de la curva  $y = \frac{2x}{1-x^2}$  para  $x > 1$ .

**S**

En el punto  $P\left(2, -\frac{4}{3}\right)$  la deja y se desplaza a lo largo de la recta tangente a dicha curva.

a) Halla la ecuación de la tangente.

b) Si se desplaza de derecha a izquierda, halla el punto en el que la partícula encuentra a la asíntota vertical más próxima al punto  $P$ .

c) Si el desplazamiento es de izquierda a derecha, halla el punto en el que la partícula encuentra el eje  $OX$ .

$$a) f'(x) = \frac{2(1-x^2) - 2x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2-2x^2+4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{2x^2+2}{(1-x^2)^2}$$

$$f'(2) = \frac{10}{9}$$

La ecuación de la recta tangente en  $P$  es:

$$y = -\frac{4}{3} + \frac{10}{9}(x-2) \rightarrow y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9}$$

b) La asíntota vertical más próxima a  $P$  es  $x = 1$ . Tenemos que hallar el punto de intersección de  $x = 1$  con la recta tangente anterior:

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9} \\ x = 1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y = \frac{-22}{9} \\ x = 1 \end{array} \right\} \text{El punto es } \left(1, \frac{-22}{9}\right)$$

c) Tenemos que hallar el punto en el que la recta anterior corta al eje  $OX$ :

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9} \\ y = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \frac{10}{9}x = \frac{32}{9} \\ y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{32}{10} = \frac{16}{5} \left\} \text{El punto es } \left(\frac{16}{5}, 0\right)$$

**21** Dada la función  $f(x) = x^2 |x-3|$  halla:

**S**

a) Los puntos en los que  $f$  no es derivable.

b) Calcula sus máximos y mínimos.

c) Representala gráficamente.

$$a) f(x) = \begin{cases} -x^2(-x+3) & \text{si } x < 3 \\ x^2(x-3) & \text{si } x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} -x^3 + 3x^2 & \text{si } x < 3 \\ x^3 - 3x^2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

- Si  $x \neq 3$ , tenemos que:  $f(x)$  es derivable. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 6x & \text{si } x < 3 \\ 3x^2 - 6x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\left. \begin{array}{l} f'(3^-) = -9 \\ f'(3^+) = 9 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} f'(3^-) \neq f'(3^+) \\ f(x) \text{ no es derivable en } x = 3 \end{array} \right\} \text{(Punto } (3, 0)).$$

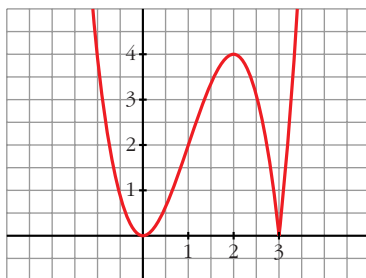
$$b) f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} -3x^2 + 6x = 0 & \text{si } x < 3 \\ 3x^2 - 6x = 0 & \text{si } x > 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = 2 \rightarrow (2, 4) \end{cases}$$

Como  $f(x) \geq 0$  para todo  $x$ , tenemos que:

$f(x)$  tiene un mínimo en  $(0, 0)$  y otro en  $(3, 0)$ , y tiene un máximo en  $(2, 4)$ .

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Uniendo todo lo anterior, llegamos a la gráfica:



- 22** Comprueba que la función  $f(x) = \frac{|x|}{x+1}$  tiene dos asíntotas horizontales distintas.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x+1} = -1 \rightarrow y = -1 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \rightarrow y = 1 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \rightarrow +\infty$$

- 23** Dada la función  $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$ , calcula  $a$  y  $b$  para que la gráfica de  $f$  pase por el punto  $(-2, -6)$  y tenga, en ese punto, tangente horizontal. Para ese valor de  $a$  y  $b$ , representa la función.

$$f(x) = ax + b + \frac{8}{x}; \quad f'(x) = a - \frac{8}{x^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ Pasa por } (-2, -6) \rightarrow -2a + b - 4 = -6 \\ \bullet \text{ Tangente horizontal } \rightarrow f'(-2) = 0 \rightarrow a - 2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2a + b = -2 \\ a = 2 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} -2a + b = -2 \\ a = 2 \end{array}} \right\} a = 2; \quad b = 2$$

Para estos valores, queda:  $f(x) = 2x + 2 + \frac{8}{x}$

- **Dominio:**  $\mathbb{R} - \{0\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$$f(x) = 2x + 2 + \frac{8}{x} \rightarrow y = 2x + 2 \text{ es asíntota oblicua}$$

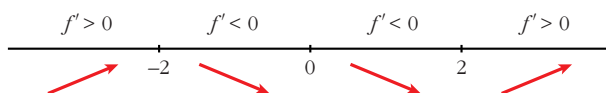
(Si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) < 2x + 2$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > 2x + 2$ )

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2 - 8}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2 - 8 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de  $f'(x)$ :



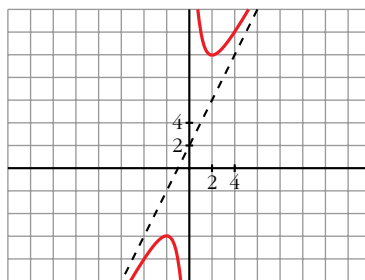
$f(x)$  es creciente en  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en  $(-2, 0) \cup (0, 2)$

tiene un máximo en  $(-2, -6)$

tiene un mínimo en  $(2, 10)$

• **Gráfica:**



**24** Estudia y representa  $y = \text{arc tg } x$  indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y extremos, si los hubiere.

$$y = \text{arc tg } x$$

• **Dominio:**  $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0 \end{aligned} \right\}$$

Ramas parabólicas.

• **Crecimiento y extremos:**

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

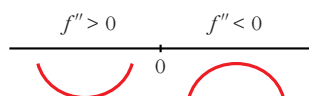
$f'(x) > 0$  para todo  $x \rightarrow f(x)$  es creciente

$f(x)$  no tiene máximos ni mínimos.

$$\bullet f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

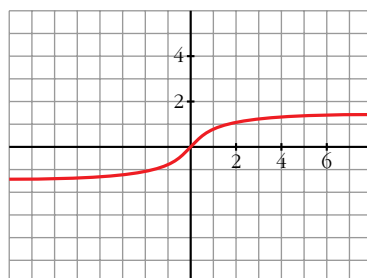
$$f''(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de  $f''(x)$ :



Hay un punto de inflexión en  $(0, 0)$ .

• **Gráfica:**



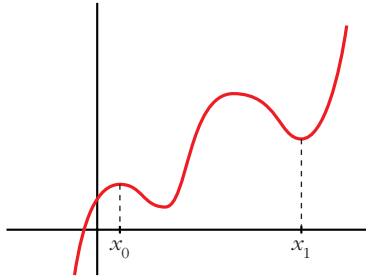
## CUESTIONES TEÓRICAS

**25** ¿Qué podemos decir del grado de una función polinómica que tiene dos máximos y dos mínimos relativos? En esa función, ¿puede estar uno de los mínimos más alto que el máximo?

• Si tiene dos máximos y dos mínimos relativos, y es polinómica, su derivada tiene, al menos, cuatro raíces; es decir,  $f'(x)$  será, al menos, de grado 4.

Por tanto,  $f(x)$  será, al menos, de grado 5.

• Sí, podría haber un mínimo más alto que un máximo. Por ejemplo:



El mínimo de  $x_1$  está más alto que el máximo de  $x_0$ .

**26 ¿Cuántos puntos de inflexión puede tener como máximo una función polinómica de cuarto grado?**

Si  $f(x)$  es un polinomio de cuarto grado,  $f'(x)$  será un polinomio de tercer grado y  $f''(x)$  será un polinomio de segundo grado.

Así,  $f'(x)$  tendrá, a lo sumo, dos raíces.

Por tanto,  $f(x)$  tendrá, como máximo, dos puntos de inflexión.

**27 La función  $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$  no está definida en  $x = 1$  ni en  $x = -1$ ; sin embargo, tiene solo una asíntota vertical. Justifica esta información.**

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

En  $x = -1$  hay una discontinuidad evitable, no hay una asíntota.

**28 ¿Cuántas asíntotas verticales puede tener una función? ¿Y horizontales?**

- Asíntotas verticales puede tener infinitas. (Como ejemplo, podemos considerar la función  $y = \frac{1}{\text{sen } x}$ , cuya gráfica está representada en el ejercicio 18, es la gráfica 2).
- Asíntotas horizontales puede tener, como máximo, dos: una cuando  $x \rightarrow -\infty$  y otra cuando  $x \rightarrow +\infty$ .

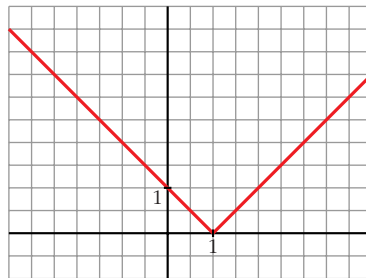
**29 Da un ejemplo de una función que tenga un mínimo en  $x = 1$  y que no sea derivable en ese punto. Representala.**

$$y = |x-1| = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x < 1 \\ x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f(x) > 0 \text{ para } x \neq 1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Hay un m\u00ednimo en } x = 1, \text{ en } (1, 0).$$

$f(x)$  no es derivable en  $x = 1$ , pues  $f'(1^-) = -1 \neq f'(1^+) = 1$ .

La gr\u00e1fica es:



- 30** Da un ejemplo de una funci\u00f3n que sea derivable en  $x = 1$  con  $f'(1) = 0$  y que no tenga m\u00e1ximo ni m\u00ednimo en ese punto.

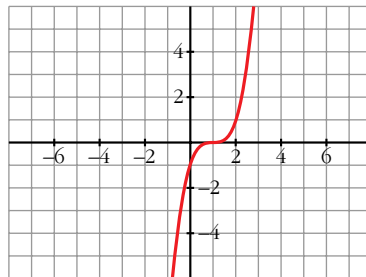
Por ejemplo,  $y = (x - 1)^3$ .

$$f'(x) = 3(x - 1)^2 \rightarrow f'(1) = 0$$

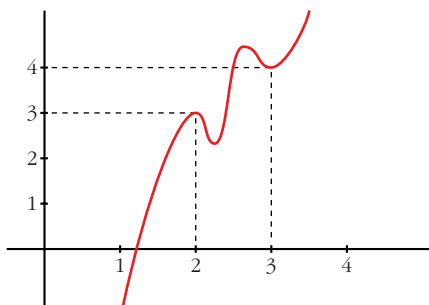
$$f'(x) > 0 \text{ para } x \neq 1 \rightarrow f(x) \text{ es creciente}$$

En  $x = 1$  hay un punto de inflexi\u00f3n.

La gr\u00e1fica es:



- 31** Si es posible, dibuja una funci\u00f3n continua en el intervalo  $[0, 4]$  que tenga, al menos, un m\u00e1ximo relativo en el punto  $(2, 3)$  y un m\u00ednimo relativo en el punto  $(3, 4)$ . Si la funci\u00f3n fuera polin\u00f3mica, \u00bfcu\u00e1l habr\u00eda de ser, como m\u00ednimo, su grado?



$f(x)$  debe tener, al menos, dos m\u00e1ximos y dos m\u00ednimos en  $[0, 4]$ , si es derivable.

Si  $f(x)$  fuera un polinomio, tendr\u00eda, como m\u00ednimo, grado 5 (pues  $f'(x)$  se anular\u00eda, al menos, en cuatro puntos).

PARA PROFUNDIZAR

**32** Representa la función  $y = x - \text{arc tg } x$  determinando el dominio de definición, asíntotas, máximos, mínimos e intervalos de crecimiento.

$$y = x - \text{arc tg } x$$

• **Dominio:**  $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:** No tiene.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty; & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \text{arc tg } x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ 1 - \frac{\text{arc tg } x}{x} \right] = \\ & & &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ 1 - \frac{1}{1+x^2} \right] = 1 - 0 = 1 \rightarrow \text{Rama parabólica} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

• **Crecimiento, máximos y mínimos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

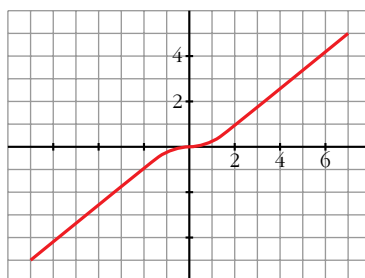
$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \text{ para } x \neq 0 \rightarrow f(x) \text{ es creciente}$$

Hay un punto de inflexión en  $(0, 0)$ .

No tiene máximos ni mínimos.

• **Gráfica:**



**33** Halla las asíntotas de las siguientes funciones:

a)  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

b)  $y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$

c)  $y = \ln(\text{sen } x)$

d)  $y = 2x + \text{sen } 2x$

e)  $y = \frac{\text{sen } x}{x} + 2$

f)  $y = \frac{\text{cos } x}{x}$

$$a) y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

• **Dominio:**

$$e^x - e^{-x} = 0 \rightarrow e^x = e^{-x} \rightarrow x = 0$$

$$D = \mathbb{R} - \{0\}$$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \rightarrow y = -1 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \rightarrow -\infty \text{ (} f(x) < -1 \text{)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \rightarrow y = 1 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \rightarrow +\infty \text{ (} f(x) > 1 \text{)}$$

$$b) y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

• **Dominio:**  $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:**

No hay asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = 0 \rightarrow y = 0 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \rightarrow -\infty \text{ (} f(x) > 0 \text{)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = 1 \rightarrow y = 1 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \rightarrow +\infty \text{ (} f(x) < 1 \text{)}$$

$$c) y = \ln(\operatorname{sen} x)$$

• **Dominio:**

Solo está definida cuando  $\operatorname{sen} x > 0$ ; es decir, en los intervalos  $(0, \pi) \cup (2\pi, 3\pi) \cup (4\pi, 5\pi) \cup \dots$

El dominio son todos los intervalos de la forma:  $(2k\pi, (2k + 1)\pi)$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ .

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2k\pi^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi^-} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 2k\pi; \quad x = (2k + 1)\pi \\ \text{son asíntotas verticales } (k \in \mathbb{Z}) \end{array}$$

No hay asíntotas horizontales ni oblicuas.

(No existe  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ni  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ).

$$d) y = 2x + \operatorname{sen} 2x$$

• **Dominio:**  $\mathbb{R}$

• No tiene asíntotas.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \operatorname{sen} 2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sen} 2x \text{ no existe.}$$

(Análogo razonamiento cuando  $x \rightarrow -\infty$ ).

e)  $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x} + 2$

• **Dominio:**  $\mathbb{R} - \{0\}$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\operatorname{sen} x}{x} + 2 \right] = 3. \text{ No tiene asíntotas verticales.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \rightarrow y = 2 \text{ es asíntota horizontal.}$$

(La curva corta a la asíntota infinitas veces).

f)  $y = \frac{\cos x}{x}$

• **Dominio:**  $\mathbb{R} - \{0\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

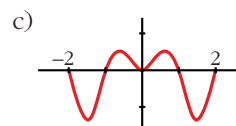
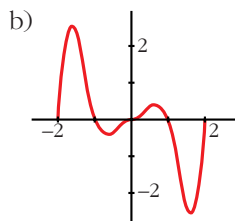
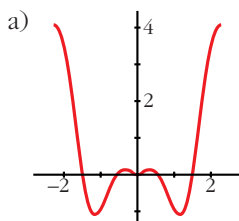
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$  es asíntota horizontal.

(La curva corta a la asíntota horizontal infinitas veces).

- 34** Las siguientes gráficas corresponden a las funciones  $f(x) = x \operatorname{sen}(\pi x)$ ;  $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(\pi x)$ ;  $h(x) = x^2 \cos(\pi x)$  en el intervalo  $[-2, 2]$ .

**S** Relaciona, de forma razonada, cada gráfica con su correspondiente función.



- $f(x)$  y  $b(x)$  son funciones pares y  $g(x)$  es impar.

Por tanto, la gráfica de  $g(x)$  ha de ser la b).

- $f(2) = 0 \rightarrow$  la gráfica de  $f(x)$  es la c).

Luego la gráfica de  $b(x)$  es la a).

- Es decir: a)  $b(x)$ ; b)  $g(x)$ ; c)  $f(x)$

## PARA PENSAR UN POCO MÁS

- 35** Para averiguar las asíntotas de  $y = \sqrt{x^2 - 2x}$  tuvimos que realizar un notable esfuerzo (páginas 338 y 339). Sin embargo, utilizando el sentido común y casi sin ningún tecnicismo, podríamos haberlo resuelto fácilmente. Veamos cómo:

$$\sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 - 1} = \sqrt{(x-1)^2 - 1} \approx \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$$

Es decir, nuestra función, para valores grandes de  $|x|$ , se aproxima mucho a  $y = |x-1|$ .

Además, es “un poco menor” (observa que se resta 1 en el radicando). La función  $y = |x-1|$  está formada, precisamente, por las dos asíntotas de nuestra función.

- a) Averigua, de forma similar, las asíntotas de:

$$y = \sqrt{x^2 + 2x} \quad y = \sqrt{x^2 - 6x + 12}$$

- b) Ídem  $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$ .

a)  $\sqrt{x^2 + 2x} = \sqrt{x^2 + 2x + 1 - 1} = \sqrt{(x+1)^2 - 1} \approx \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$

La función  $y = |x+1|$  está formada por las dos asíntotas oblicuas de la función  $y = \sqrt{x^2 + 2x}$ .

$$\sqrt{x^2 - 6x + 12} = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + 2} = \sqrt{(x-3)^2 + 2} \approx \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$$

La función  $y = |x-3|$  está formada por las dos asíntotas oblicuas de la función  $y = \sqrt{x^2 - 6x + 12}$ .

- b) Para valores grandes de  $|x|$ , tenemos que:

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \approx \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Así,  $y = -1$  es asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

$y = 1$  es asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow +\infty$ .

- 36** Aunque la palabra *asíntota* la hemos aplicado a rectas que se aproximan a una gráfica, tiene un significado más amplio: se dice que dos curvas son *asintóticas* cuando, al alejarse del origen, la distancia entre ellas tiende a cero.

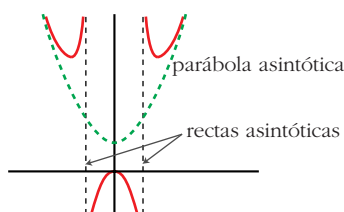
Por ejemplo, la parábola  $y = x^2 + 1$  es *asintótica* a la función:

$$y = f(x) = \frac{x^4}{x^2 - 1} \quad (\text{revisa su gráfica en la página 337}).$$

Es fácil comprobarlo:  $\frac{x^4}{x^2 - 1} = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2 - 1}$  (Simplemente hemos efectuado el cociente.)

La diferencia entre las dos funciones es  $\frac{1}{x^2 - 1}$  que tiende a cero cuando

$x \rightarrow -\infty$  y cuando  $x \rightarrow +\infty$ . Además, toma valores positivos, por lo que la curva de  $y = f(x)$  queda por encima de la parábola. Este resultado permite representar la función de forma más precisa apoyándonos en la representación de la parábola:



- a) Razonando igual, halla la parábola asintótica a la función:

$$y = \frac{x^3 - 2x^2 + x + 8}{x} \quad \text{y determina la posición de la curva respecto a ella.}$$

- b) Representa la gráfica de la función teniendo en cuenta esos datos, así como la asíntota vertical y el punto singular (solo hay uno de abscisa  $x = 2$ ).

$$a) y = \frac{x^3 - 2x^2 + x + 8}{x} = x^2 - 2x + 1 + \frac{8}{x}$$

La parábola es  $y = x^2 - 2x + 1$ .

- Cuando  $x \rightarrow -\infty$ , la diferencia entre la función y la parábola,  $\frac{8}{x}$ , es negativa; luego, la curva está por debajo de la parábola.
- Cuando  $x \rightarrow +\infty$ , la diferencia,  $\frac{8}{x}$ , es positiva; luego, la curva está por encima de la parábola.

- b) **Asíntota vertical:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

• **Punto singular:**

$$f'(x) = 2x - 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^3 - 2x^2 - 8}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^3 - 2x^2 - 8 = 0 \rightarrow 2(x-2)(x^2 + x + 2) = 0 \rightarrow x = 2$$

Hay un mínimo en (2, 5).

• **Gráfica:**

